Méthodes de conception en électronique

Cours 2

Dernier cours

- Amplificateurs opérationnels:
  - Fonctionnement de base
  - Analyse de circuits
- Aujourd’hui: synthèse de fonctions de transfert
  - Approche théorique
  - Implantation avec amplificateurs

Mise en contexte

- Lorsqu'on mesure un signal, on veut:
  - Avoir un grand signal
  - Avoir peu de bruit

  Un bon SNR
- On peut amplifier... mais ça va amplifier ET le signal ET le bruit
  - Le ratio reste identique

$$SNR = \frac{Signal}{Bruit}$$

- Il faut trouver des moyens d'amplifier le signal tout en réduisant le bruit:
  - Il faut donc filtrer!

Mise en contexte

- Dans l'ECG, il y a un bruit de basse fréquence
  - On voudrait un filtre passe-haut
- Dans l'EMG, on veut lisser les données:
  - On veut un filtre passe bas
- Les signaux du 60Hz sont parfois très forts:
  - On veut un filtre qui coupe le 60Hz
- Dans chacun des cas, il existe une fonction de transfert pour régler le problème

On veut donc apprendre à implanter ces fonctions de transfert

Fonctions de transfert

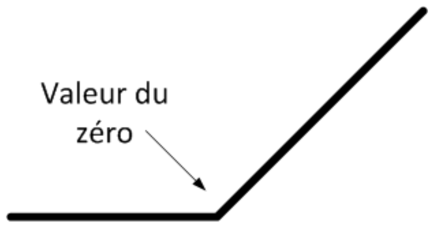
- Les fonctions de transfert peuvent provenir de plusieurs sources
  - Compensation du comportement dynamique (systèmes asservis)
  - Filtres bien connus (Butterworth, Bessel, Chebychev)
  - Déduits par intuition
- L'objectif de cette prochaine partie est de développer un peu d'intuition...

Fonctions de transfert

- Les approches intuitives ne sont souvent pas optimales
  - Mais elles nous aident à mieux assimiler la matière
- Les filtres viennent en plusieurs formes:
  - Passe haut, passe bas, passe bande, coupe bande..
  - Ordre, fréquence de coupure, gain, etc.
- Avec les connaissances acquises, on est en mesure de construire des filtres...

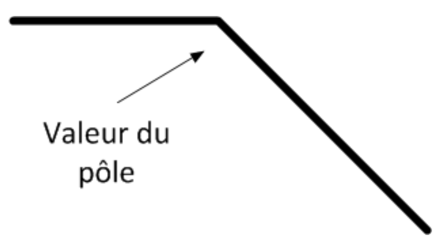
Rappel

- Racine de s au numérateur: zéro
  - Cause +20dB/décade à partir de la fréquence du zéro



$$T(s) = \frac{s + 50}{s + 200}$$

- Racine de s au dénominateur: pôle
  - Cause -20dB/décade à partir de la fréquence du pôle



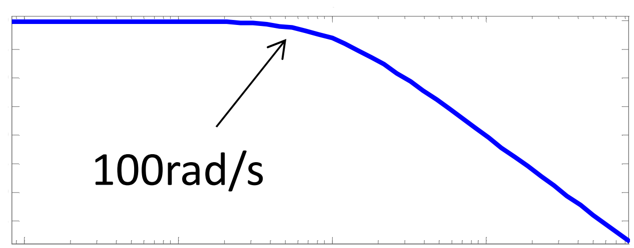
$$T(s) = \frac{450}{s + 500}$$

Sans pôle ou zéro, la réponse est horizontale…

Généralisation: Passe bas

- Si les s ne sont qu'au dénominateur, le filtre est passe bas
  - Exception: pôles imaginaires (circuit résonnant)
- Raison:
  - Les racines du dénominateur (pôles) causent une chute de 20dB/décade
  - Gain s'atténue à mesure que la fréquence augmente
  - Plus de pôles, plus ça s'atténue vite

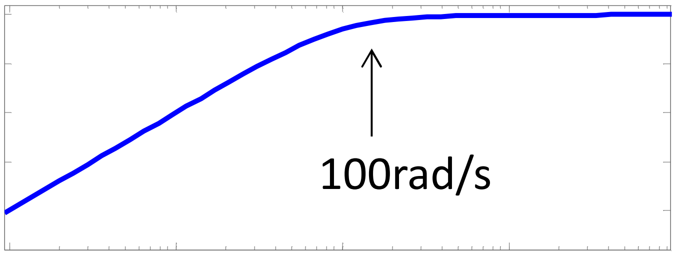
$$T(s) = \frac{100}{s+100}$$



Généralisation: Passe haut

- Si le s est factorisable en haut et la puissance de s est égale en haut et en bas: filtre passe haut
- Raison:
  - S factorisable amène le gain à 0 à DC
  - S à l’origine (+20dB/décade)
  - S égal en haut et bas: à l’infini, le gain se stabilise

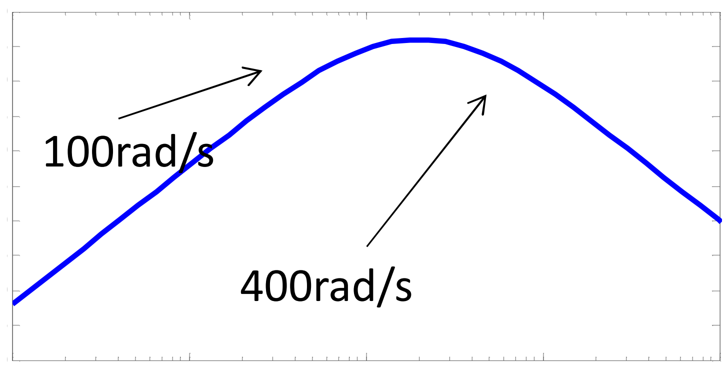
$$T(s) = \frac{s}{s+400}$$



Généralisation: Passe bande

- Si le s est factorisable en haut et la puissance de s est plus élevée en bas: filtre passe bande
- Raison:
  - S factorisable amène le gain à 0 à DC
  - S à l'origine (+20dB/décade)
  - S plus élevé en bas: à l'infini, le gain baisse

$$T(s) = \frac{s}{s + 500s + 40000} = \frac{s}{(s+100)(s+400)}$$



Imaginer une fonction de transfert

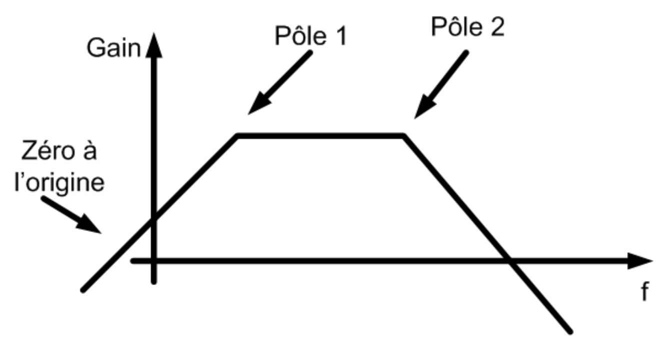
- Pour des situations simples, il est possible de pondre des fonctions de transfert
  - “J’ai besoin d’un filtre qui laisse passer les fréquences entre 100 et 1000”
  - Entre ces fréquences, le gain devra être au moins 5
- Comment faire?
- Pour commencer, il faut pouvoir identifier le type de filtre:
  - Passe bande dans ce cas-ci

Imaginer une fonction de transfert

- Avec le type, il faut se rappeler de la forme:
  - s en haut et 2 poles (ou plus) en bas...

$$T(s) = \frac{As}{(s+B)(s+C)}$$

- Le diagramme de Bode ressemblerait à ceci:



Imaginer une fonction de transfert

- Pour commencer, on met les pôles aux fréquences de coupure (100 et 1000rad/s)

$$T(s) = \frac{As}{(s+100)(s+1000)}$$

- Pour le gain, on va se mettre en régime sinusoïdal établi

$$T(s) = \frac{As}{s^2 + 1100s + 100000}$$

$$T(j\omega) = \frac{Aj\omega}{100000 - \omega^2 + 1100\,j\omega}$$

Imaginer une fonction de transfert

- On trouve l'équation du gain

$$|T(j\omega)| = \frac{A\omega}{\sqrt{(100000-\omega^2)^2 + (1100\omega)^2}}$$

- Pour le gain minimum de 5, on va se mettre à la fréquence ω=100...

$$|T(j\omega)| = \frac{A100}{\sqrt{(100000-10000)^2 + (110000)^2}}$$

Imaginer une fonction de transfert

- On manipule un peu...

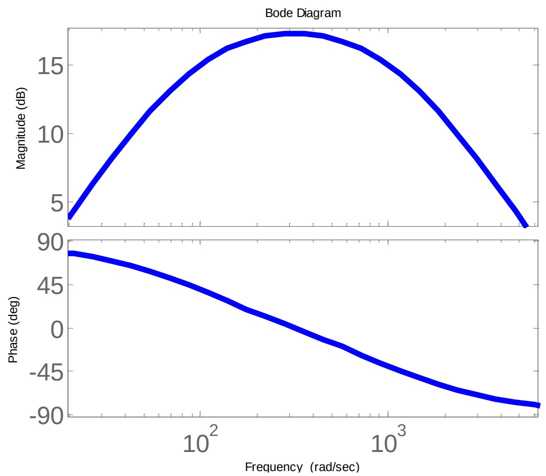
$$|T(j\omega)| = \frac{A100}{\sqrt{90000^2 + (110000)^2}} = \frac{A100}{142126}$$

- Et on isole A:

$$A = 7106 \cong 8000$$

- Ça nous donne la fonction de transfert suivante

$$T(s) = \frac{8000s}{s^2 + 1100s + 100000}$$



Exemple (seul)

- Trouvez la fonction de transfert d'un filtre passe haut avec:
  - Fréquence de coupure à 500 rad/s
  - Gain de 50 dans la bande passante

Exemple (seul)

- On commence avec la forme de la fonction de transfert:

$$T(s) = \frac{As}{s+B}$$

- La fréquence de coupure sera la fréquence du pôle:

$$T(s) = \frac{As}{s+500}$$

Exemple (seul)

- Dans la bande passante, le gain doit être 50...

$$T(j\omega) = \frac{Aj\omega}{j\omega + 500}$$

- Le gain devient

$$\left|T(j\omega)\right| = \frac{A\omega}{\sqrt{\omega^2 + 500^2}}$$

- Quand ω →∞,

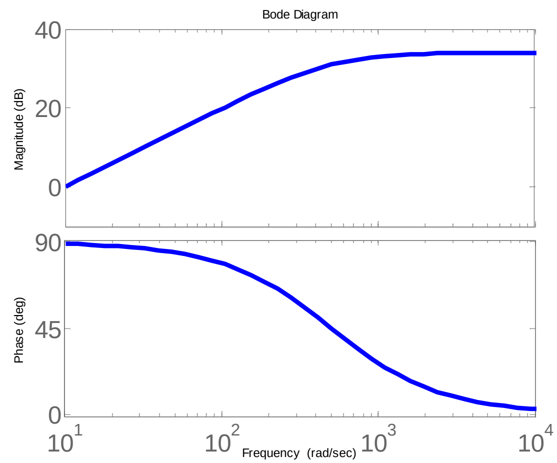
$$\left|T(j\omega)\right| \cong \frac{A\omega}{\omega} = A$$

Exemple (seul)

- Donc la fonction de transfert...

$$T(s) = \frac{50s}{s+500}$$

- Vérification avec MATLAB



Imaginer une fonction de transfert

- Le succès de cette approche dépend des contraintes:
  - Quand les pôles/zéros sont proches (à 1 décade), les résultats sont moins précis
- Donne un <u>point de départ </u>pour optimiser:
  - Sinon: syndrôme de la page blanche
- Technique pas optimale, mais ça permet de mieux comprendre les fonctions de transfert
  - Permet de mieux apprécier les solutions optimales

Synthèse

- Lorsque la fonction de transfert est terminée, on vérifie son comportement théorique:
  - MATLAB est un excellent outil pour tracer la réponse en fréquences
  - À ce moment, il est encore facile de changer la fonction de transfert et vérifier
- Par la suite, on implante la fonction (synthèse)
  - On le met sous forme de diagramme-bloc
  - Et on le transforme en circuit...

Commençons par les diagrammes-blocs

Synthèse

- Considérons cette fonction de transfert:

$$H(s) = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

- Il existe 2 manières d'implanter H(s):
    - L'approche directe I
    - L'approche directe II
- On va dériver les deux approches

Synthèse

- Pour implanter la fonction, on manipule l'équation:
  - On commence par diviser par s^3 en haut et en bas...

$$H(s) = \frac{b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}}$$

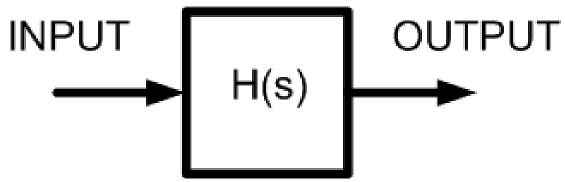
On veut avoir 1 au denominateur là où la plus grosse puissance était

  - On sépare la division en multiplication

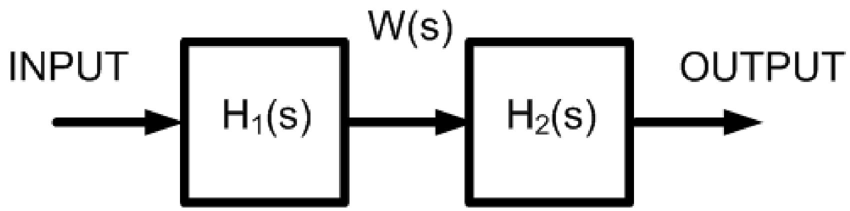
$$H(s) = \underbrace{\left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}\right)}_{H_1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}}\right)}_{H_2}$$

Synthèse

- On sait que le système ressemble à:



- On sait aussi que H(s) est divisé en 2 parties:



- Commençons par trouver W(s)...

$$W(s) = INPUT \cdot H_1(s) = INPUT \cdot \left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3} \right)$$

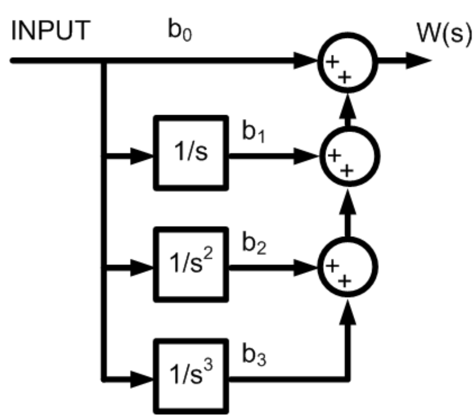
Synthèse

- On peut développer cette équation:

$$W(s) = INPUT \cdot \left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3} \right) \Rightarrow W(s) = \left(INPUT \cdot b_0 + \frac{INPUT}{s} \cdot b_1 + \frac{INPUT}{s^2} \cdot b_2 + \frac{INPUT}{s^3} \cdot b_3 \right)$$

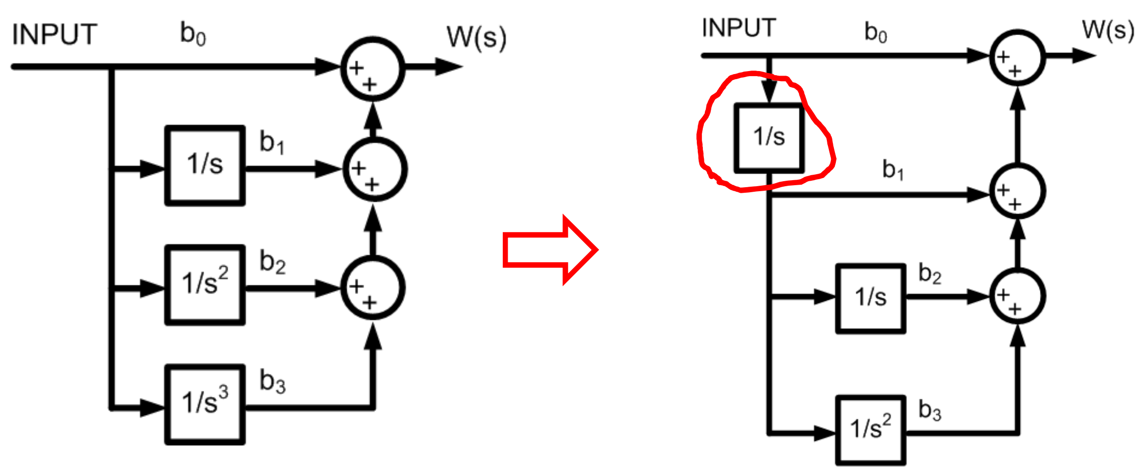
  - Input sera multiplié par b_0
  - Input sera intégré une fois et multiplié par b_1
  - Input sera intégré 2 fois et multiplié par b_2
  - Input sera intégré 3 fois et multiplié par b_3

On pourrait donc implanter ça avec le diagramme suivant



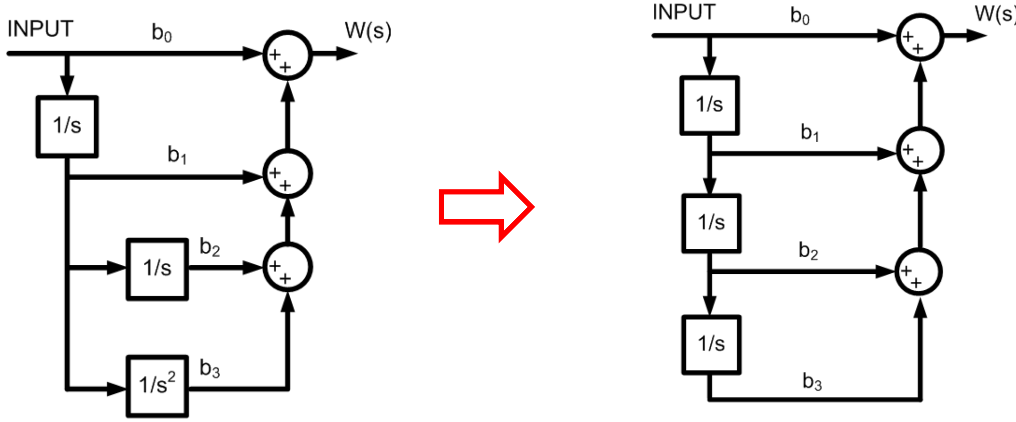
Synthèse

- SI je décidais de “sortir” l’intégrale de b_1...
  - Pour avoir des résultats semblables, il faudrait réduire les intégrales des autres...
  - Et à la place d’avoir 6 intégrales, on est rendu à 4
  - On pourrait faire la même chose avec le reste...



Synthèse

- On sort donc l'intégrale du b_2 et on obtient:



- On se retrouve donc avec 3 intégrales...
  - On ré-écrit W(s) pour mieux représenter sa structure...

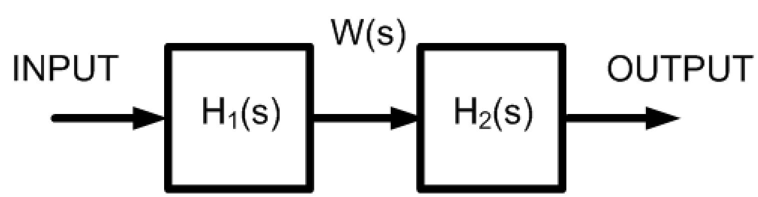
$$W(s) = INPUT\left(b_0 + \frac{1}{s}\left(b_1 + \frac{1}{s}\left(b_2 + \frac{1}{s}b_3\right)\right)\right)$$

Synthèse

- Nous venons de voir comment implanter H_1 dans l'équation suivante:

$$H(s)=\underbrace{\left(b_0+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{s^2}+\frac{b_3}{s^3}\right)}_{H_1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s^3}}\right)}_{H_2}$$

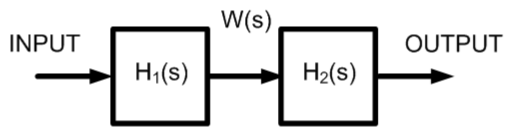
- En multipliant l'input par H_1 on a obtenu W(s)
    - Il faut maintenant multiplier W(s) par H_2 pour avoir notre output



Synthèse

- Pour implanter la deuxième partie, il faut en dériver l'équation:

$$OUTPUT = W(s) \cdot H_2(s)$$



- On substitue H2:
  - Mais je le sais pas comment implanter la division!

$$OUTPUT = W(s) \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}}$$

- Alors, on passe le dénominateur à gauche

$$OUTPUT\left(1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}\right) = W(s)$$

Synthèse

- On distribue l'output dans la parenthèse:

$$\left(OUTPUT + OUTPUT\,\frac{a_1}{s} + OUTPUT\,\frac{a_2}{s^2} + OUTPUT\,\frac{a_3}{s^3} \right) = W(s)$$

- On garde 1 output à gauche et le reste s'en va à droite:
  - On factorise OUTPUT à droite:

$$OUTPUT = W(s) - OUTPUT\left(\frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3} \right)$$

  - Finalement, on entre le négatif dans la parenthèse

$$OUTPUT = W(s) + OUTPUT\left(-\frac{a_1}{s} - \frac{a_2}{s^2} - \frac{a_3}{s^3} \right)$$

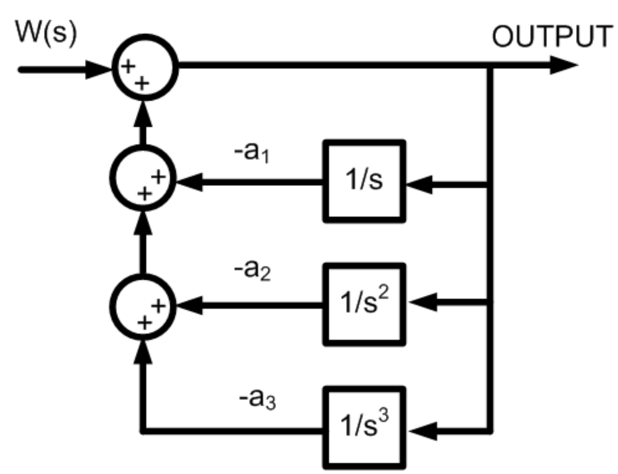
Synthèse

- On recopie l'équation ici...

$$OUTPUT = W(s) + OUTPUT\left(-\frac{a_1}{s} - \frac{a_2}{s^2} - \frac{a_3}{s^3}\right)$$

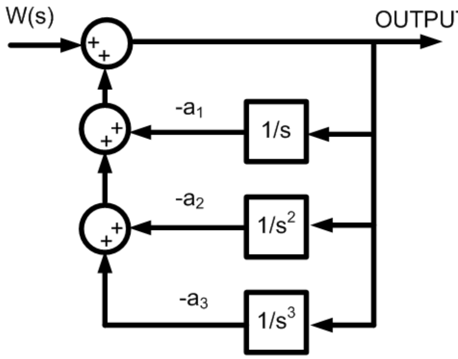
- OUTPUT est égal à W(s) additionné avec OUTPUT qui a été integré et multiplié:

$$OUTPUT = W(s) + OUTPUT\left(-a_1\frac{1}{s} - a_2\frac{1}{s^2} - a_3\frac{1}{s^3}\right)$$

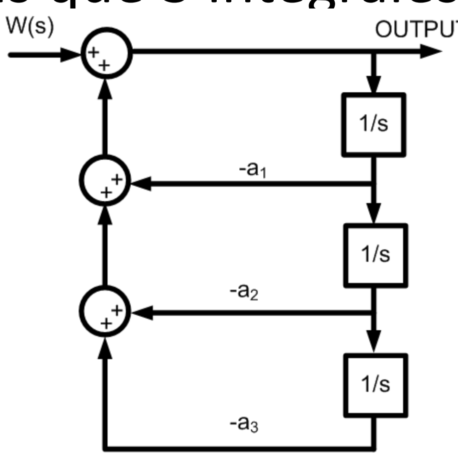


Synthèse

- On se retrouve avec 6 intégrales:



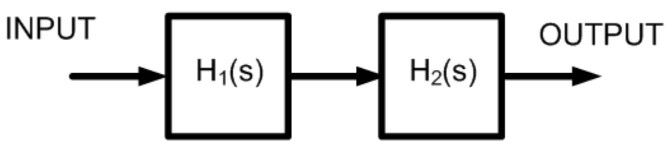
- On sort les intégrales comme tantôt:
  - Il ne reste plus que 3 intégrales:

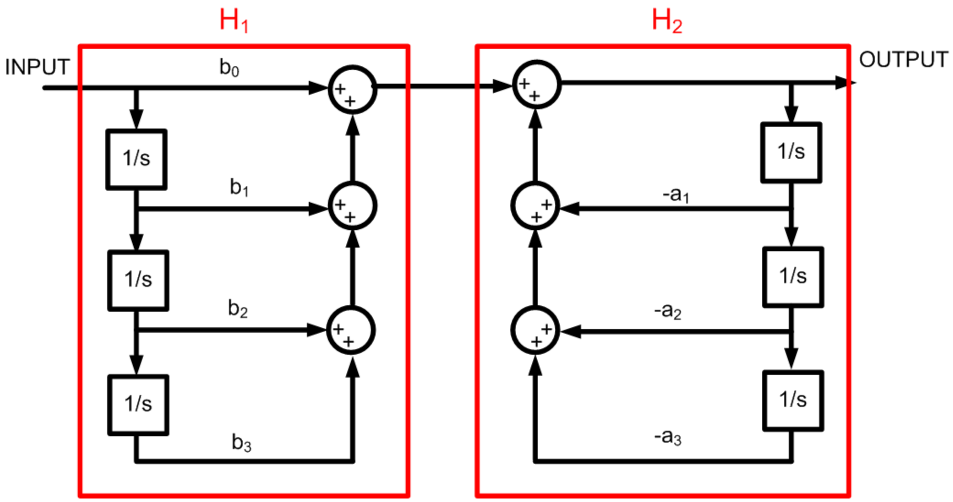


Combinons le tout ensemble

Synthèse

- Ça nous donne notre première approche...
  - On l'appelle l'approche directe I

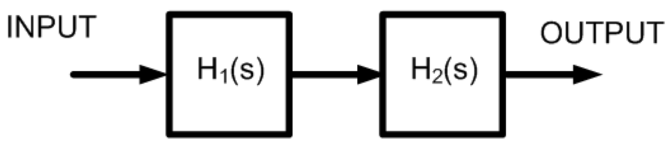


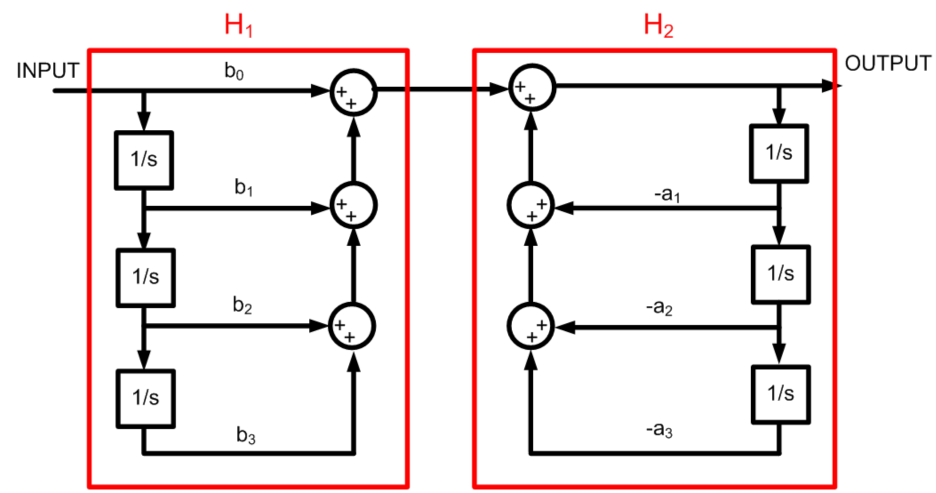


- L'approche directe II ressemble beaucoup à ça:
  - Dérivons l'approche II avant de faire des exercices...

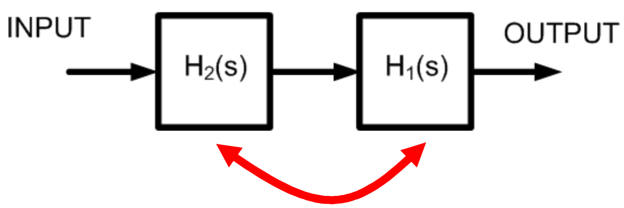
Synthèse

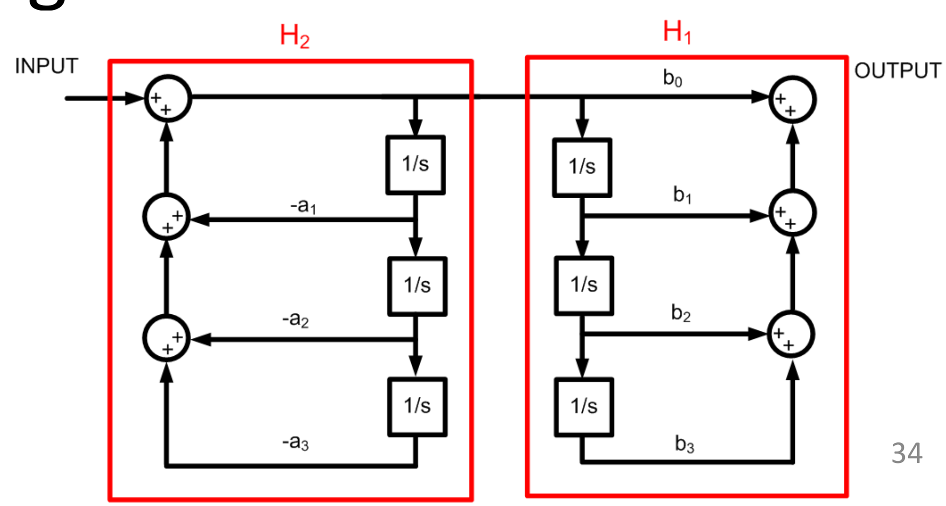
- Approche directe I:





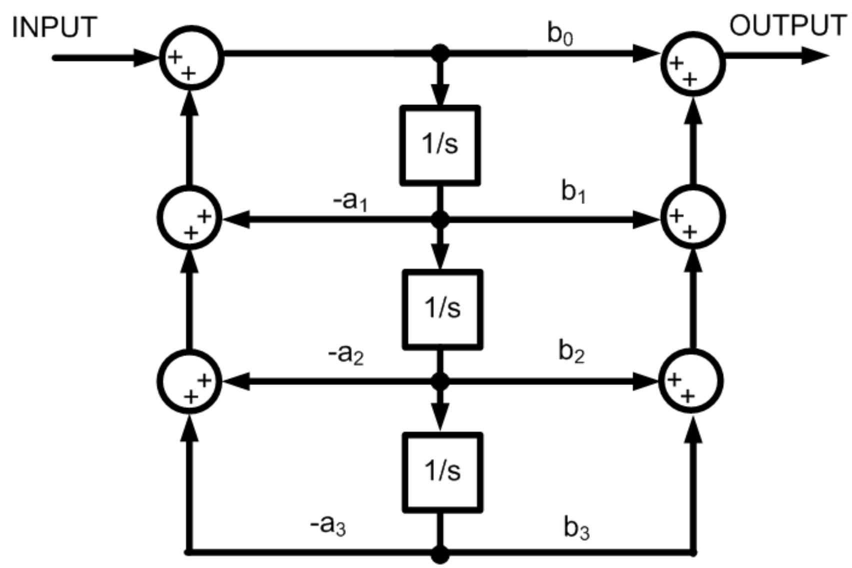
- On a le droit de changer l'ordre





Synthèse

- On se rend compte que les intégrales peuvent être partagées:
  - On se retrouve avec 3 intégrales au total...



Exemple

- Implantez sous forme de diagramme bloc, les fonctions de transfert suivants:

$$\frac{5}{s+7} \qquad \frac{s}{s+7} \qquad \frac{s+5}{s+7}$$

Ref: Problème 4.19 dans Linear systems and signals, 2e ed. B. P. Lathi

Exemple

- Prenons le premier: $\dfrac{5}{s+7}$
- Pour l'implanter, on veut avoir 1 au dénominateur où la plus haute puissance était
  - Plus grosse puissance au dénominateur: s
  - Donc, on divise en haut et en bas par s

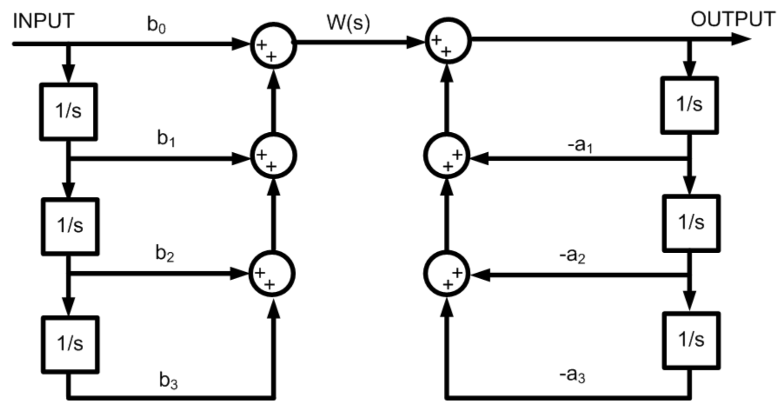
$$\frac{5}{s+7} \Rightarrow \frac{\frac{5}{s}}{1+\frac{7}{s}}$$

Exemple

- Pour nous faciliter le travail faisons les étapes suivantes:
  - Faisons l'implementation avec l'approche directe I
  - On va utiliser la même structure que dans l'exemple
  - On le simplifie
  - Transformons ça en implantation avec l'approche directe II

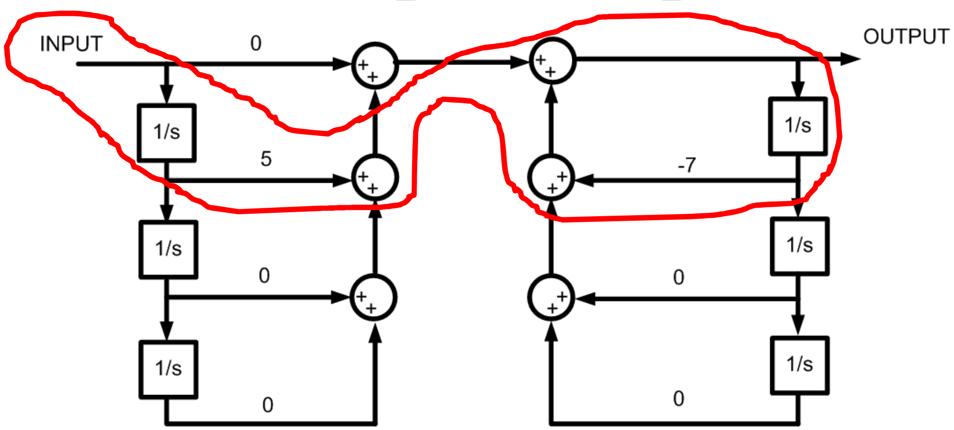
Exemple

- L'exemple qu'on avait ressemblait à ça:



$$H(s)=\frac{b_0+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{s^2}+\frac{b_3}{s^3}}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s^3}}$$

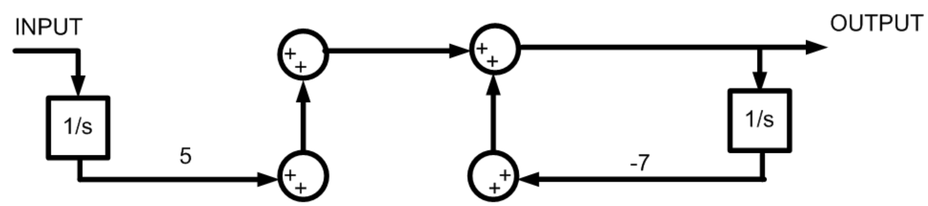
- On aurait b_1=5 et a_1=7...



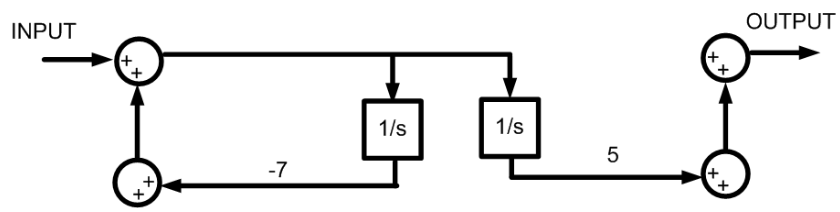
$$\frac{\frac{5}{s}}{1+\frac{7}{s}}$$

Exemple

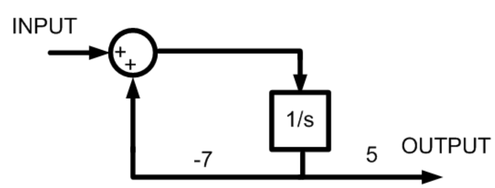
- La prochaine étape est d'enlever les branches avec 0:



- On inverse H_1 et H_2 et ça devient:



- On combine les intégrales et on simplifie:



Exemple

- Faisons le 2e... On change sa forme:
  - Plus grosse puissance au dénominateur: s
  - On divise par s

$$\frac{s}{s+7} \Rightarrow \frac{1}{1+\frac{7}{s}}$$

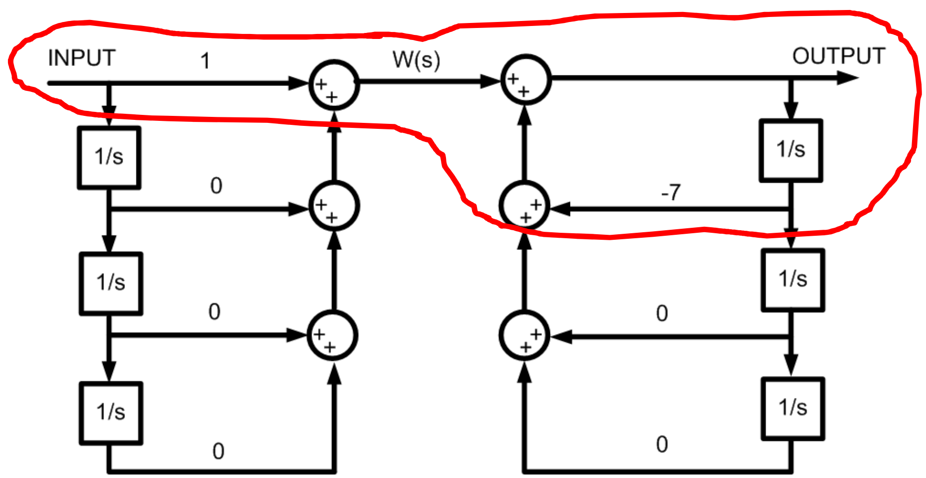
- On fait la correspondance entre les termes:
  - b_0: Terme qui divise s puissance 0 au numérateur
  - b_1: Terme qui divise s puissance 1 au numérateur...

$$H(s)=\frac{b_0+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{s^2}+\frac{b_3}{s^3}}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s^3}}$$

$b_0=1$, $a_1=7$

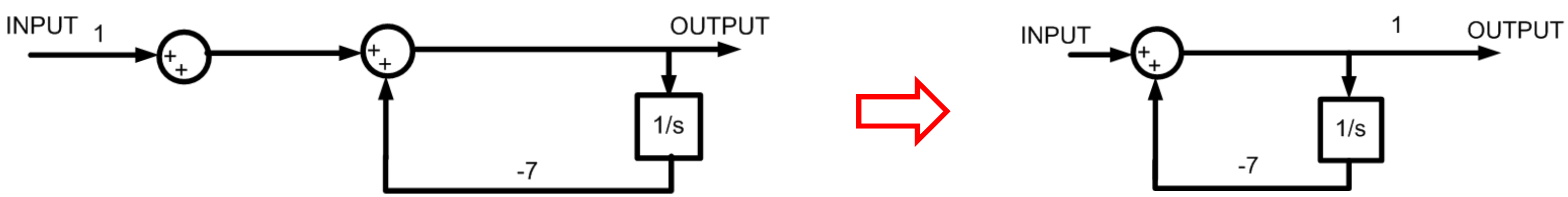
Exemple

- On met les termes dans le diagramme connu



$b_0=1,\ a_1=7$

- En simplifiant, on obtiendrait ceci:



Forme 1

Forme 2

Exemple

- Faisons le 3e... on change sa forme:
  - Plus haute puissance au dénominateur: s
  - On divise par s partout...

$$\frac{s+5}{s+7} \Rightarrow \frac{1+\frac{5}{s}}{1+\frac{7}{s}}$$

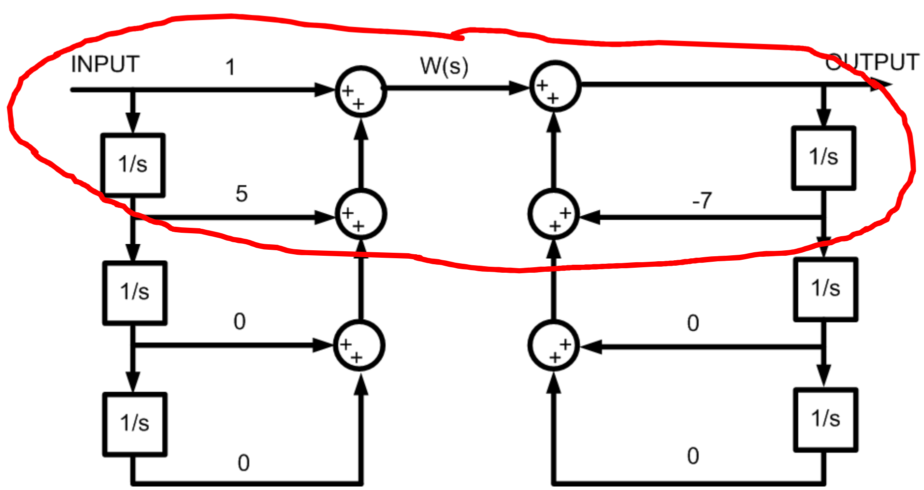
- On fait la correspondance entre les termes:

$$H(s)=\frac{b_0+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{s^2}+\frac{b_3}{s^3}}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s^3}}$$

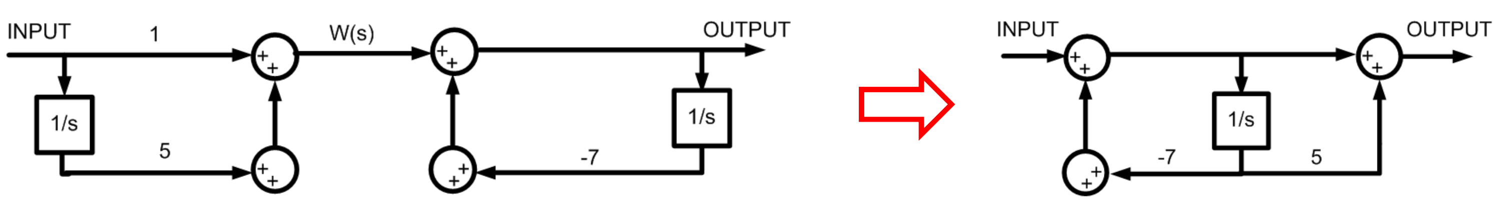
$b_0=1$, $b_1=5$, $a_1=7$

Exemple

- On met les termes dans le diagramme connu



- En simplifiant, on obtiendrait ceci:



Exemple (seul)

- Implantez la fonction suivante avec le moins d'intégrateur possible:

$$\frac{4s+28}{s^2+6s+5}$$

- Rappel:

$$H(s)=\frac{b_0+\frac{b_1}{s}+\frac{b_2}{s^2}+\frac{b_3}{s^3}}{1+\frac{a_1}{s}+\frac{a_2}{s^2}+\frac{a_3}{s^3}}$$

Exemple (seul)

- On commence par mettre la fonction de transfert sous une forme propice:

$$\frac{4s+28}{s^2+6s+5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dfrac{4}{s}+\dfrac{28}{s^2}}{1+\dfrac{6}{s}+\dfrac{5}{s^2}}$$

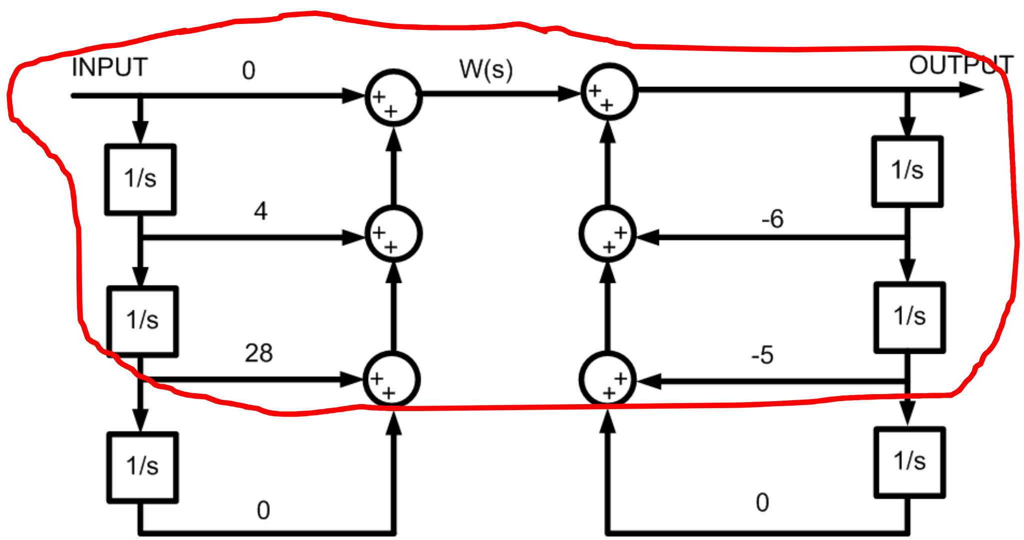
- En comparant avec la fonction de transfert connue, on identifie les termes...

$$H(s)=\frac{b_0+\dfrac{b_1}{s}+\dfrac{b_2}{s^2}+\dfrac{b_3}{s^3}}{1+\dfrac{a_1}{s}+\dfrac{a_2}{s^2}+\dfrac{a_3}{s^3}}$$

$b_0=0$ $b_1=4$ $b_2=28$, $a_1=6$ et $a_2=5$

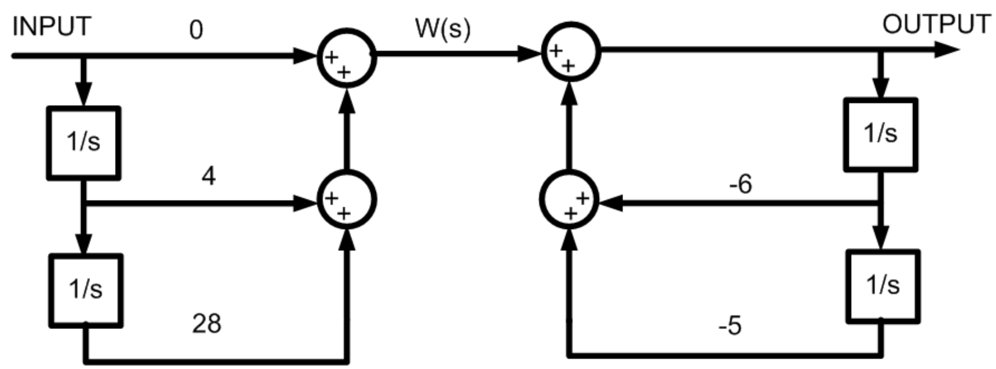
Exemple (seul)

- Avec ces termes, on peut dessiner le système sous cette forme

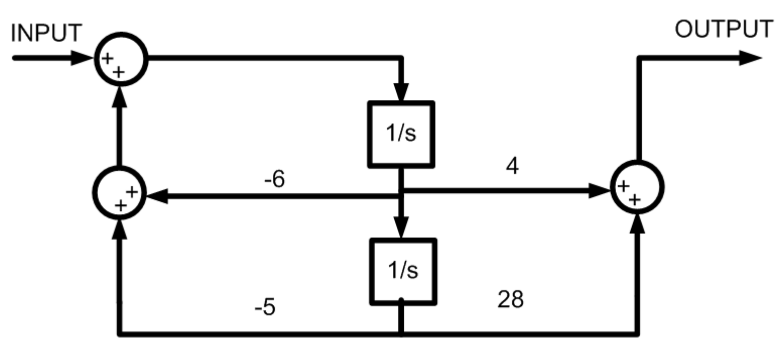


Exemple (seul)

- On enlève le superflu...



- On inverse H_1 et H_2 et on simplifie:



Implantation avec ampli-op

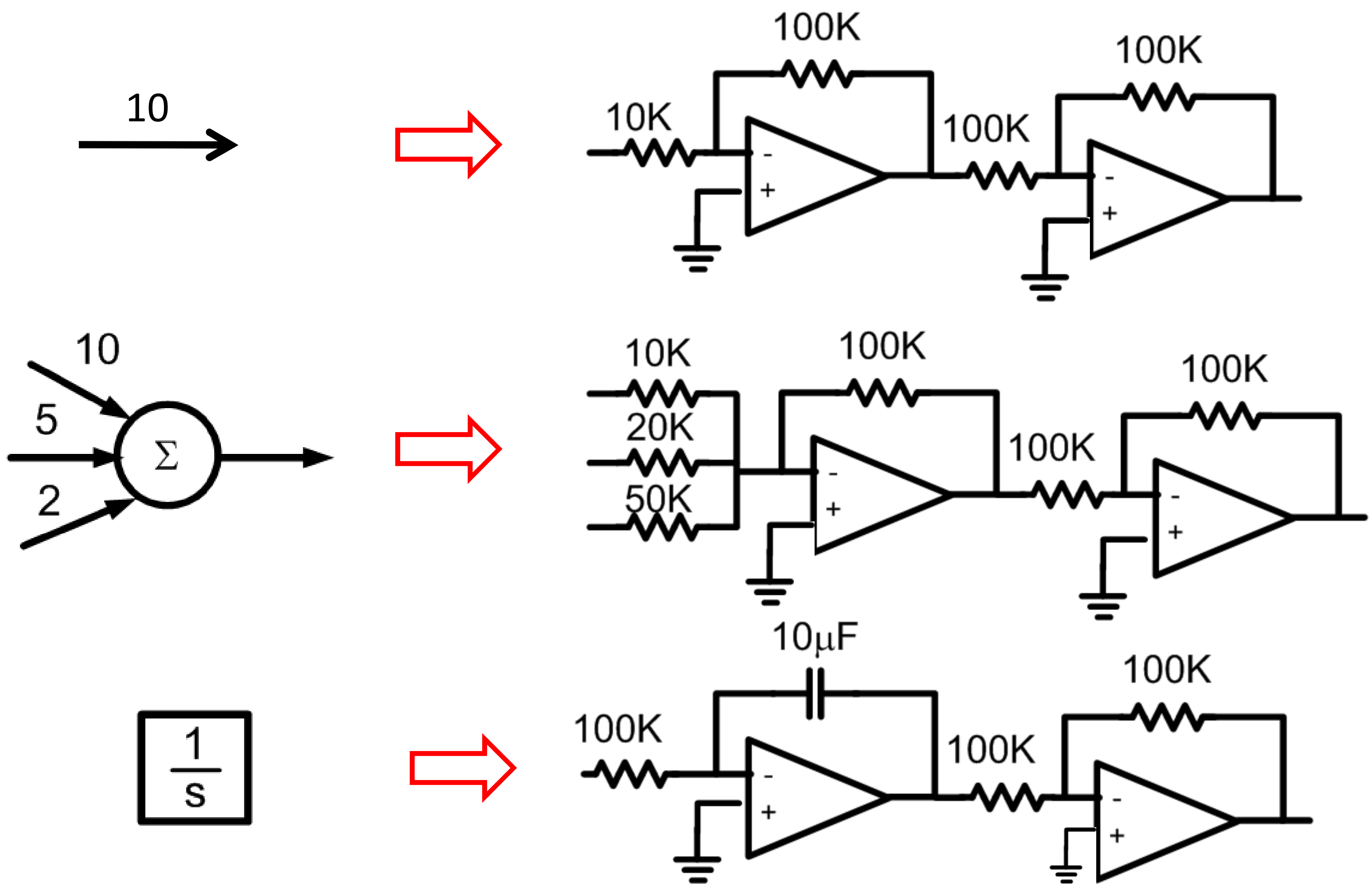
- Principe:
  - Chaque bloc correspond à 1 ou à 2 amplificateurs opérationnels
  - Il faut substituer et choisir les valeurs des composantes
- Complication:
  - Plusieurs opérations sont inversées (gain négatif)
  - L’optimisation peut causer un mal de tête...

Implantation avec ampli-op

- Méthode
  - Construire le diagramme-bloc à partir de la fonction de transfert
  - Substituer les blocs par les fonctions avec amplificateurs
  - Optimiser lorsque possible
  - Faire attention aux signes

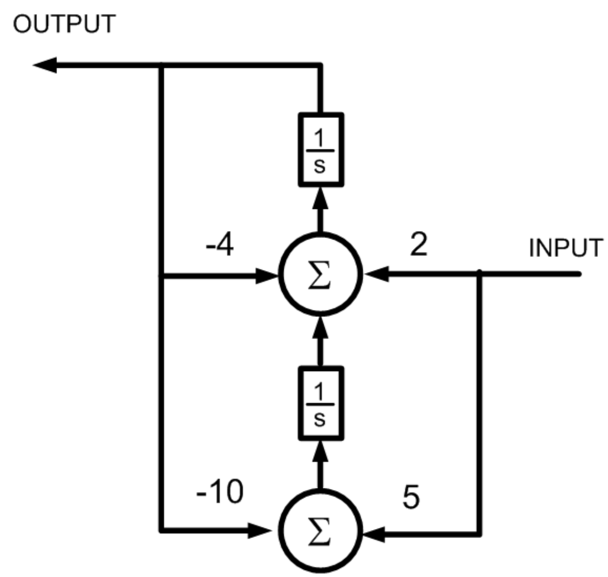
Implantation avec ampli-op

- Types de structures suggérées:



Exemple

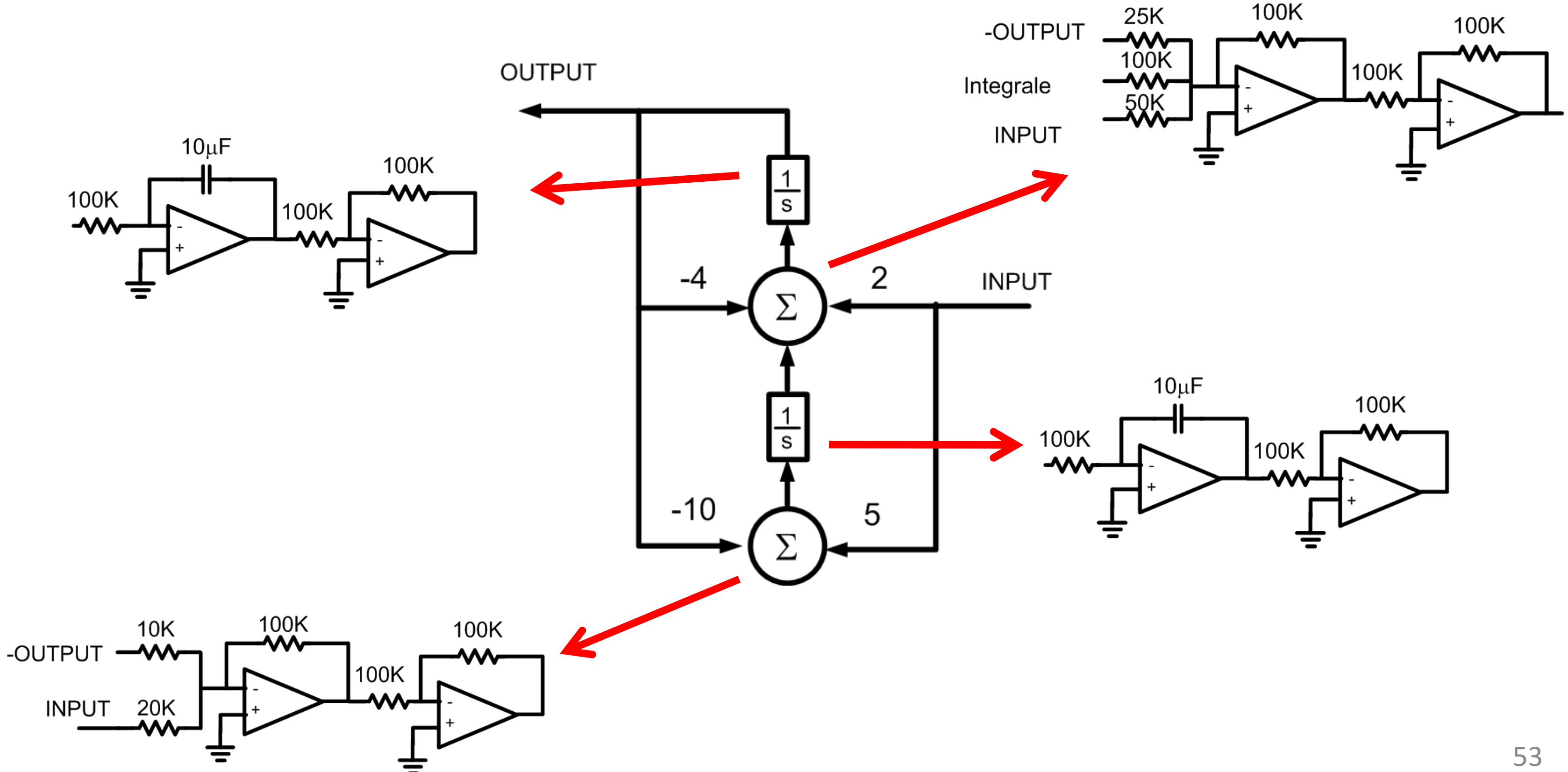
- Implantez le système suivant avec des amplificateurs:



$$\frac{5+2s}{s^2+4s+10}$$

Exemple

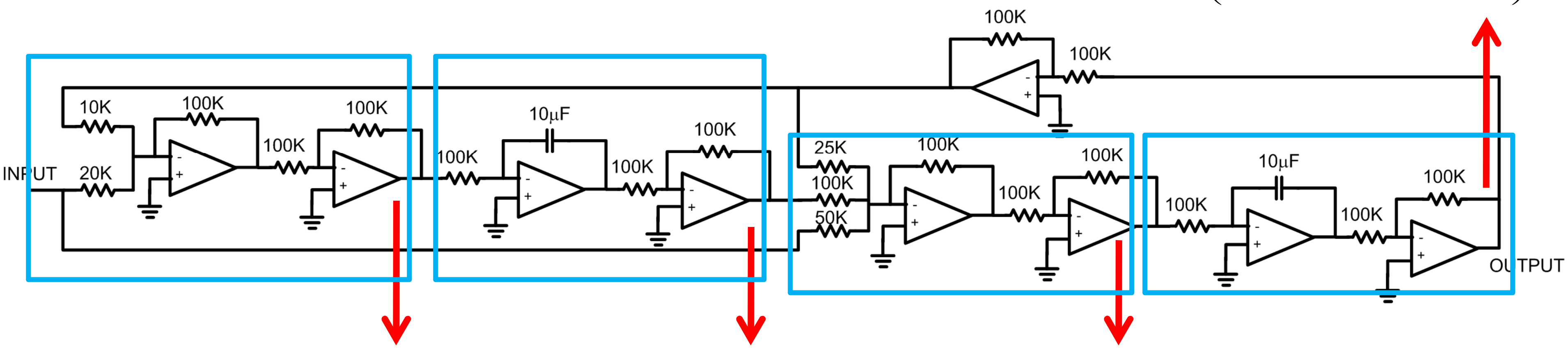
- Chaque bloc peut être implanté avec des amplificateurs



Exemple

- Le circuit final donnerait ceci:

$$Y = \left(\frac{5X - 10Y}{s} - 4Y + 2X \right) \frac{1}{s}$$



$$5X - 10Y$$

$$\frac{5X - 10Y}{s}$$

$$\frac{5X - 10Y}{s} - 4Y + 2X$$

Exemple

- Vérifions que notre circuit est bon:
  - On met tout sur le même dénominateur s^2:

$$Y = \left(\frac{5X - 10Y}{s} - 4Y + 2X \right) \frac{1}{s} \Rightarrow s^2 Y = 5X - 10Y - 4sY + 2sX$$

- On amène les Y à gauche et les X à droite

$$s^2 Y + 10Y + 4sY = 5X + 2sX$$

- On factorise

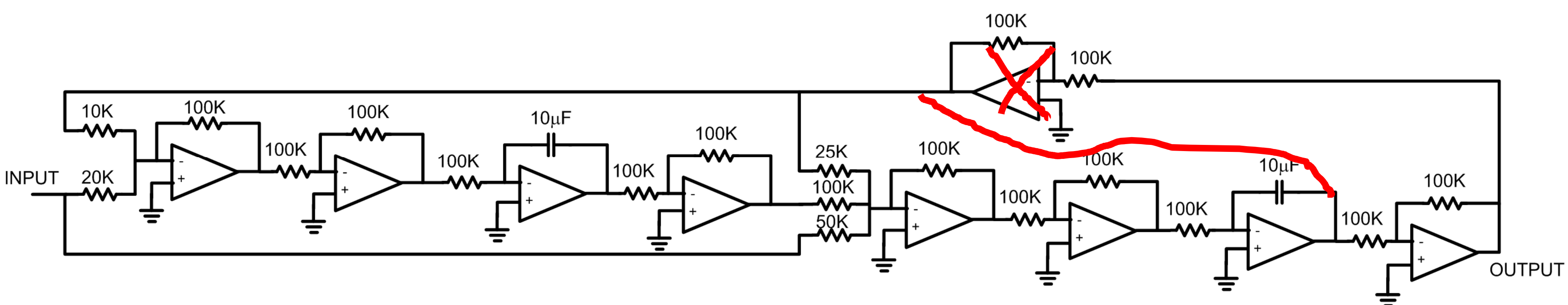
$$Y\left(s^2 + 4s + 10\right) = X\left(5 + 2s\right)$$

- On isole Y/X:

$$\frac{Y}{X} = \frac{\left(5 + 2s\right)}{\left(s^2 + 4s + 10\right)}$$

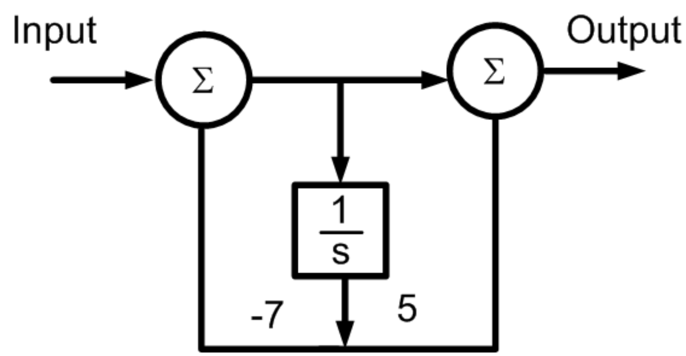
Exemple

- Note:
  - Il serait possible d'optimiser ce design
  - Par exemple, le feedback aurait pu passer par le chemin ci-dessous
  - Ça aurait sauvé un amplificateur



Exemple (seul)

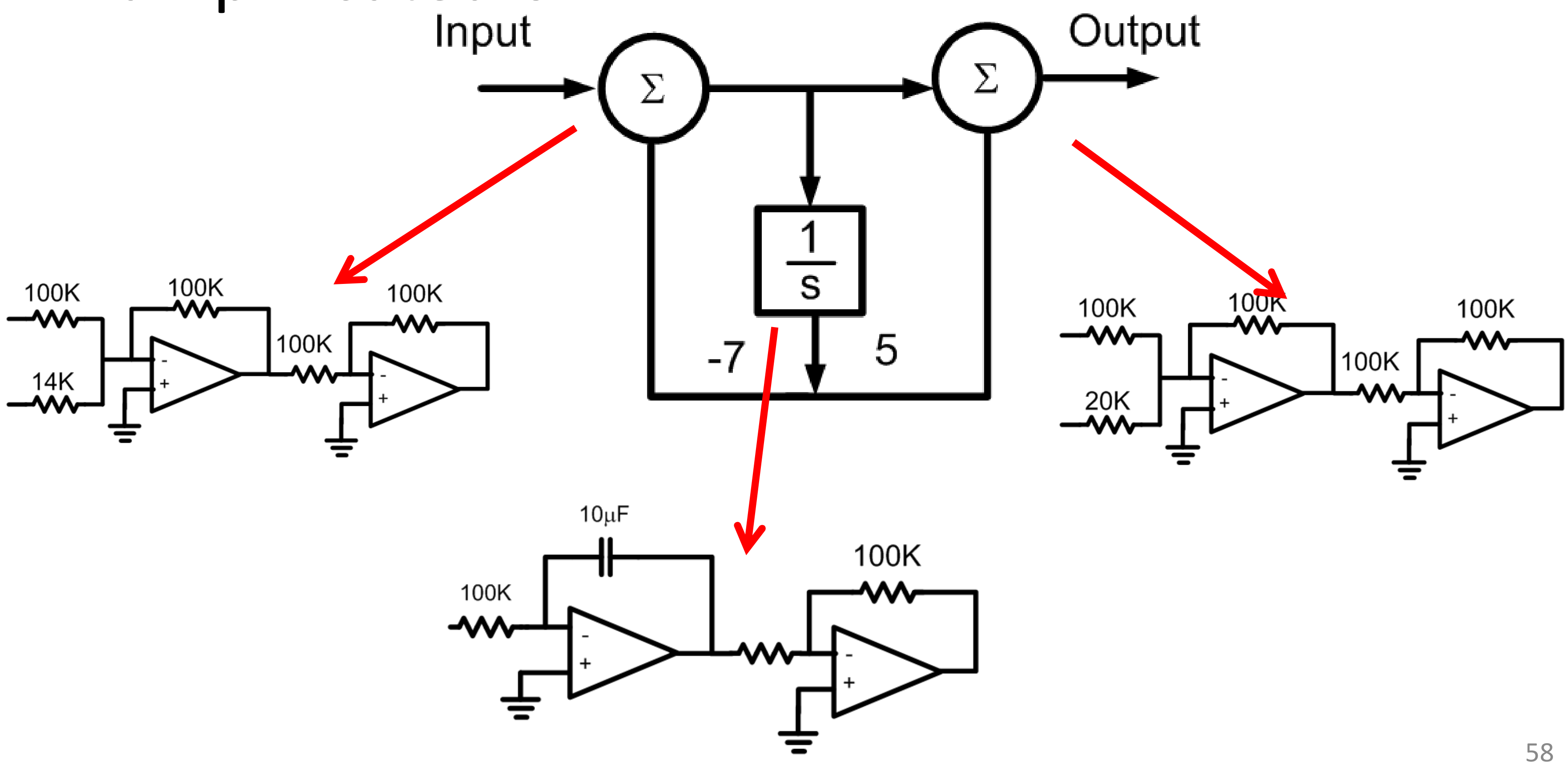
- Implantez le système suivant avec des amplificateurs:



$$\frac{s+5}{s+7}$$

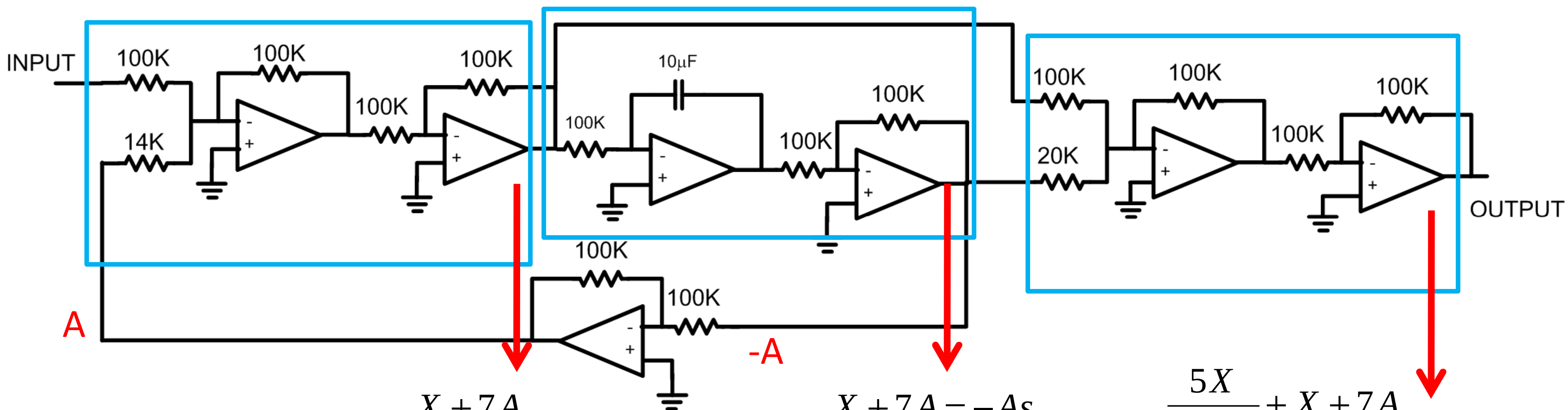
Exemple (seul)

- Implementez le systeme suivant avec des amplificateurs:



Exemple (seul)

- Le circuit final donnerait ceci:



$X + 7A$

$X + 7A = -As$

ou

$$-A = \frac{X}{(s+7)}$$

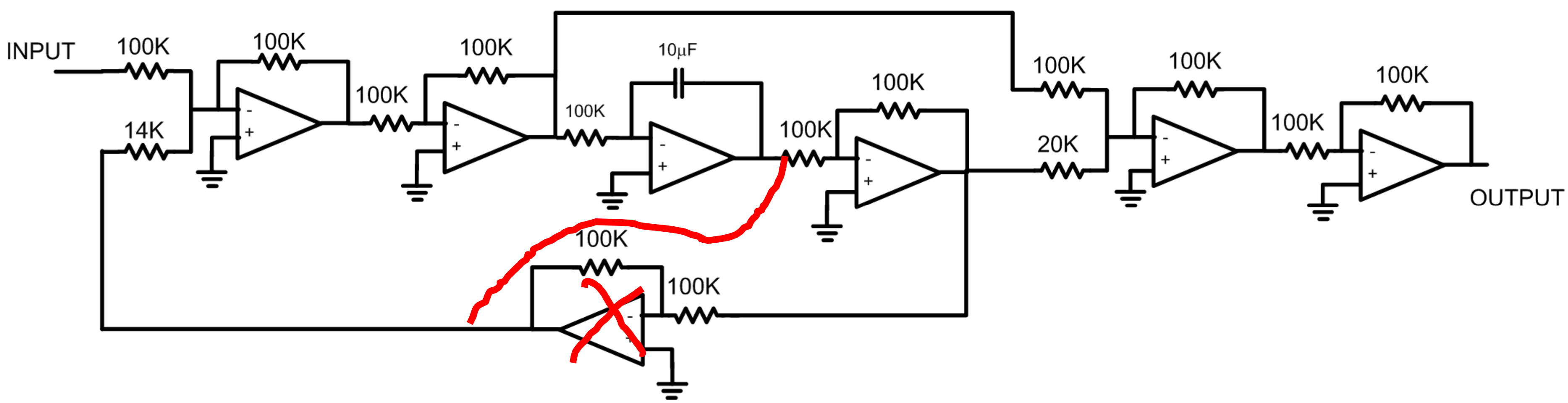
$\frac{5X}{(s+7)} + X + 7A$

ou

$$\frac{Y}{X} = \frac{(s+5)}{(s+7)}$$

Exemple (seul)

- On pourrait aussi améliorer en enlevant un des amplificateurs:



Méthodologie de conception

- À partir des spécifications, déterminer la fonction de transfert à implanter
  - Valider la fonction de transfert (MATLAB, par exemple)
- Transformer en diagramme bloc
  - Approche I ou II
- Transformer en circuit avec ampli-op
  - Simuler pour la réponse en fréquence et en transitoire
- Implanter sur circuit

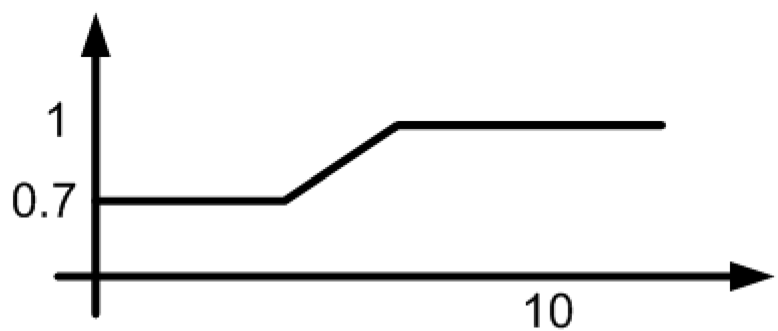
Méthodologie de conception

- Cette approche est typiquement utilisée pour des gros systèmes
  - Dans ce cours, on l'utilise même pour des petites fonctions de transfert
  - L'idée est de comprendre les étapes et de démontrer qu'on les maîtrise
- C'est d'ailleurs l'objectif du laboratoire 1

Retournons voir notre exemple de tantôt...

Méthodologie de conception

- Sous forme de question de conception, on pourrait dire ceci:
  - “Concevez un système qui a un gain de 0.7 à très basses fréquences et un gain de 1 à des fréquences plus que 10Hz”
- La première étape serait de trouver la fonction de transfert.



Méthodologie de conception

- Il y a un zéro à une fréquence plus faible
- Il y a un pôle à une fréquence plus élevée

$$T(s) = \frac{s + zero}{s + pole}$$

- En effectuant quelques tests, on pourrait arriver à

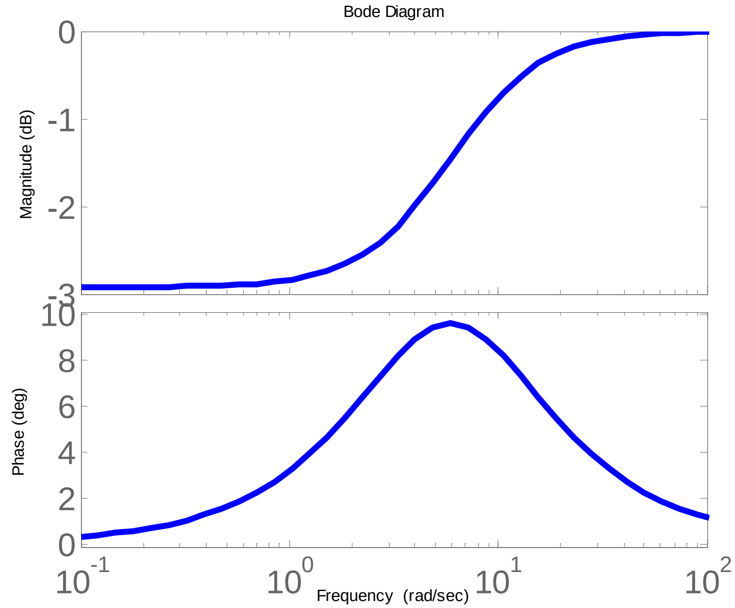
$$T(s) = \frac{s+5}{s+7}$$

(En fait, (s+7)/(s+10) aurait été plus intuitif, mais bon...)

Méthodologie de conception

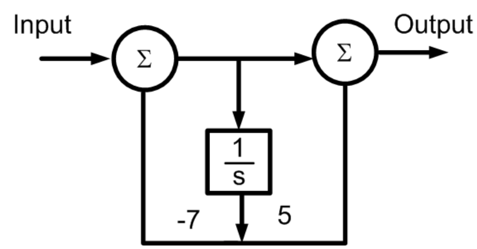
- On commence par valider les maths (MATLAB)
  - `ftransfert=tf([1 5],[1 7])`
  - `Bode(ftransfert)`

$$T(s)=\frac{s+5}{s+7}$$

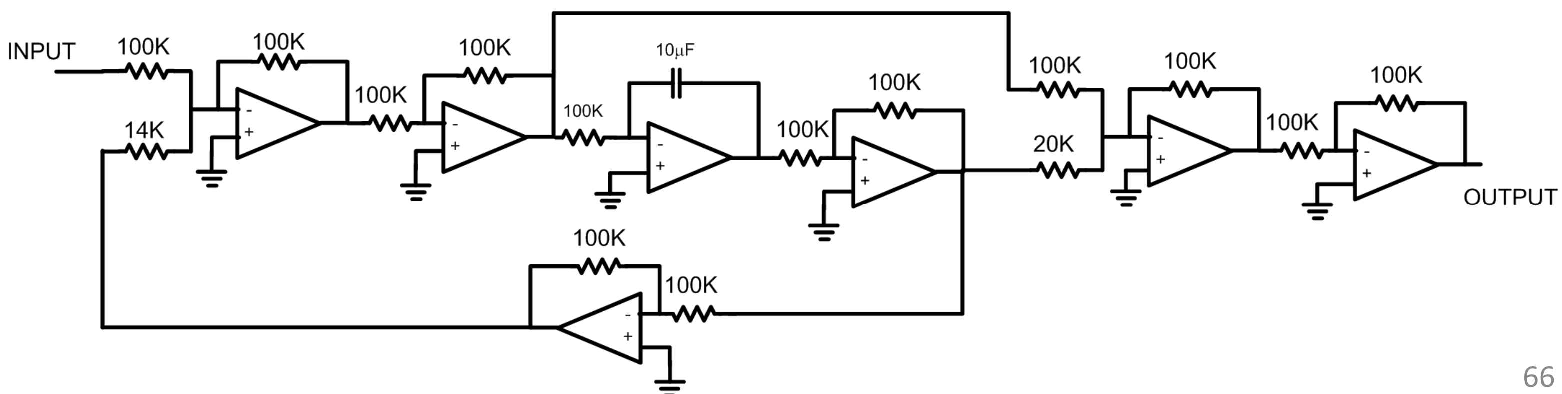


Méthodologie de conception

- Une fois validé, on construit le diagramme bloc.

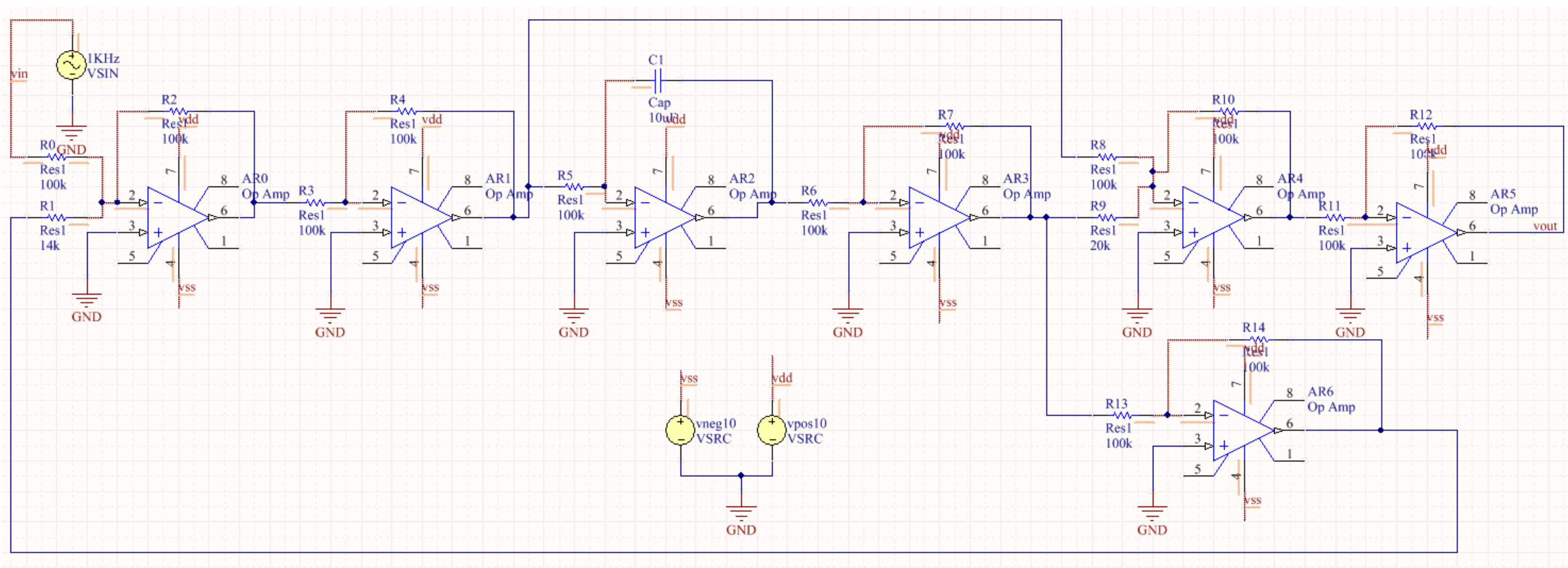


- Et on utilise ça pour créer un circuit avec ampli-op



Méthodologie de conception

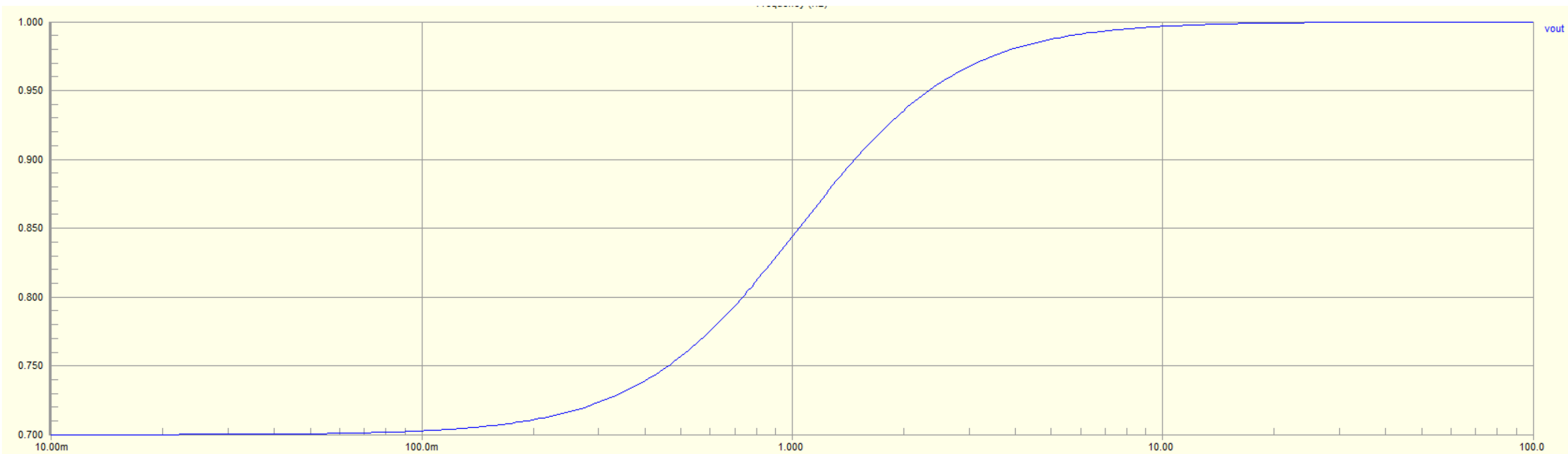
- On valide le circuit en le simulant (ALTIUM)



Méthodologie de conception

- On fait une analyse en fréquences...

$$\frac{s+5}{s+7}$$



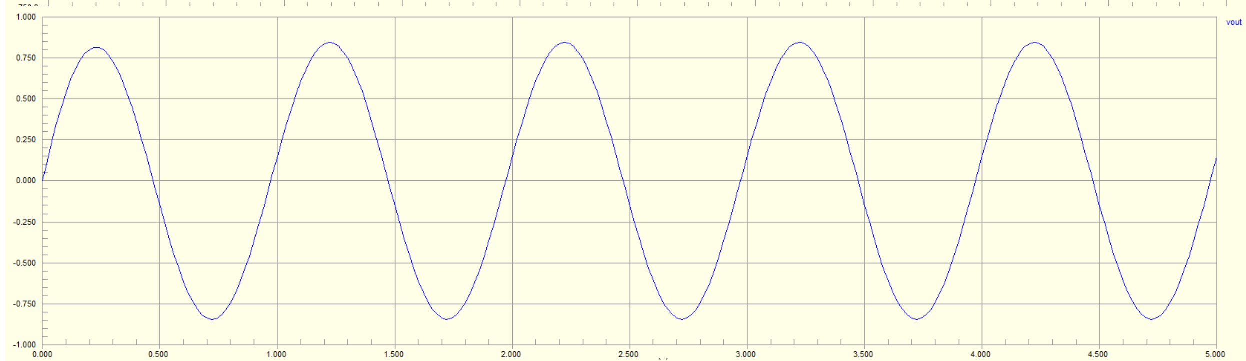
...et quelques analyses transitoires

Méthodologie de conception

0.1Hz

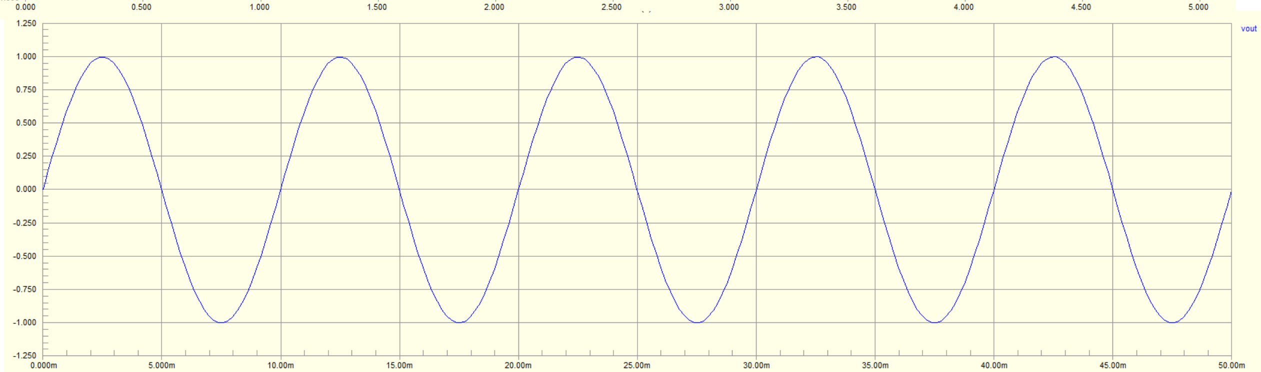
Amplitude=0.7

1Hz



Amplitude=0.8

100Hz



Amplitude=1

Méthodologie de conception

- La prochaine étape serait d'implanter le circuit et de prendre des mesures
  - Appliquer des sinusoïdes de différentes fréquences et observer les amplitudes de sortie
  - En mettant 0.1Hz en entrée, on veut un gain de 0.7
  - En mettant 10Hz en entrée, on veut un gain de 1
  - Ça complète la processus de conception...