Systèmes Digitaux

Cours 3

Au dernier cours

- On a parlé des portes logiques différentes
- On a appris à prendre une table de verité et de la traduire en portes logiques:
    - Somme de produits (avec minterms)
    - Produit de sommes (avec maxterms)
- Tous les litéraux étaient presents: pas optimal
    - On a appris à les manipuler avec la logique de Boole
    - Ça permet de simplifier ou sinon, d'avoir la forme souhaitée

Ce cours

- On peut donc utiliser la logique de Boole pour simplifier les équations
- Problème :
  - On ne sait pas vraiment quand c'est rendu à la forme la plus simple
  - Quand est-ce que j'arrête d'essayer de simplifier?
- On va découvrir une méthode systématique qui donne un résultat presque optimal

Passons par le raisonnement logique qui permet de comprendre la nouvelle technique

Logique de Boole

- Considérons la fonction suivante:

$$F = XY + X\overline{Y}$$

- Avec la logique de Boole, on pourrait la simplifier:
  - On factorise le X

$$F = X\left(Y + \overline{Y}\right)$$

  - Y et Y' sont des compléments:

$$F = X$$

Logique de Boole

- Pensons à cette simplification de façon différente...

$$F = XY + X\overline{Y} \quad \Rightarrow \quad F = X$$

- Qu'est-ce que ca veut dire?
  - "En autant que X est '1', Y peut être 0 ou 1 et ma sortie sera '1'"
  - La valeur de Y n'a donc aucune importance et je peux l'enlever...

$$F = X$$

Compliquons les choses...

Logique de Boole

- Considérons maintenant cette fonction:

$$F = \underline{X\overline{Y}}\,\overline{Z} + \underline{X\overline{Y}}\,Z + \underline{\overline{X}\,\overline{Y}}\,\overline{Z} + \underline{\overline{X}\,\overline{Y}}\,Z$$

  - On voit que les 2 premiers termes se simplifient
  - Et les 2 prochains termes se simplifient

$$F = X\overline{Y} + \overline{X}\,\overline{Y}$$

  - Mais! On voit aussi que les termes restants peuvent être simplifiés encore plus...

$$F = \overline{Y}$$

Logique de Boole

- Ce raisonnement aurait pu s'observer de la façon suivante:
  - Je vois que Y' reste stable
  - Les autres termes X et Z peuvent être N'IMPORTE QUOI (00, 01, 10 ou 11) et la réponse serait toujours 1

$$F = X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z \quad \Rightarrow \quad F = \overline{Y}$$

- Donc, X et Z n'ont aucun impact et peuvent disparaître

Logique de Boole

- Dans le premier exemple, j'ai fait disparaître Y
  - Pour faire disparaître 1 variable, il faut que tout le reste soit constant et que Y et $\overline{Y}$ (2 termes) soient présents

$$F = XY + X\overline{Y}$$

- Dans le 2e exemple, j'ai fait disparaître X et Z
  - Pour faire disparaître 2 variables, il faut que tout le reste soit constant et que $\overline{X}\,\overline{Z}, \overline{X}Z, X\overline{Z}$ et XZ (4 termes) soient présents

$$F = X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z$$

Avec cette information, on cherche une manière de simplifier en identifiant les termes stables et les termes qui changent dans l'équation

Table de Karnaugh

- Approche générale
  - Voir quels variables sont toujours présents
  - Voir quels variables offrent toutes les possibilités

$$F = X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z$$

- Une technique s'appelle la table de Karnaugh
  - Met en évidence les parties d'équation qui restent stables et celles qui changent
  - Nous permet de décider de quelle façon on veut simplifier l'équation

Étapes

1) Dessiner une table avec toutes les possibilités en entrée en haut et à gauche
2) Remplir la table: on inscrit ‘1’ dans chaque case qui génère ‘1’ à la sortie
3) Combiner (encercler) les termes adjacents:
   - Les termes encerclés peuvent être simplifiés
   - On peut encercler en carré ou rectangle (rien d‘autre)
   - Les regroupements sont de 2, 4, 8, 16,... éléments

X \ Y	0	1
0	0 ou 1	0 ou 1
1	0 ou 1	0 ou 1

Exemple

- Simplifiez la fonction suivante avec la table de Karnaugh

$$F = XY + X\overline{Y}$$

Exemple

- On dessine la table vide

X \ Y	0	1
0		
1		

- Et on la remplit $F = XY + X\overline{Y}$
  - À chaque endroit que la fonction donne 1, on écrit 1
  - Sinon, on peut mettre 0 ou simplement, laisser vide

X \ Y	0	1
0	0	0
1	1	1
	(XY’)	(XY)

Exemple

- Si 2 termes sont adjacents, ça veut dire qu'ils:
  - Ont des litéraux qui ne changent pas (sont stables)
  - Ont **UN SEUL** litéral qui varie (0 ou 1, ou encore Y ou $\overline{Y}$)
  - Peuvent donc etre simplifiés (celui qui varie disparaît)
- Pour dire qu'on simplifie, on va les encercler:

X \ Y	**0**	**1**
0		
1	1	1

Quel terme est "constant"?
Quel terme varie?

Exemple

- Le tableau me dit que:
  - X=1 est constant
  - Y varie

Les deux 1 sont dans la rangée de X=1
Donc, X est constant

- “En autant que X=1, Y peut etre 0 ou 1, la sortie sera 1”
  - Je conserve les termes constants (X) et j’enlève les termes qui varient (Y)

X \ Y	**0**	**1**
0		
1	1	1

$$F = X$$

Exemple (seul)

- Simplifiez cette expression avec la table de Karnaugh

$$F = \overline{X}\,\overline{Y} + X\overline{Y} + XY$$

Exemple (seul)

- On place chaque terme dans la table de Karnaugh

$$F = \overline{X}\,\overline{Y} + X\overline{Y} + XY$$

X \ Y	0	1
0	1	
1	1	1

- On combine les termes adjacents le plus possible

X \ Y	0	1
0	1	
1	1	1

Exemple (seul)

- Pour chaque cercle, on énumère les termes constants:
  - Le cercle "vertical" c'est Y' (X a les valeurs 0 et 1)
  - Le cercle "horizontal" c'est X (Y a les valeurs 0 et 1)

X \ Y	0	1
0	1	
1	1	1

- Quand l'un des deux (ou les 2) est 1, F=1...

$$F = \overline{Y} + X$$

Karnaugh à 3 éléments

- Le principe est le meme peu importe le nombre de litéraux:
  - Cependant, les détails peuvent être importants
- Avec 3 entrées, on sait que:
  - La forme du tableau va être differente
  - Les cercles peuvent etre différents
- Commençons par voir la forme du tableau

Karnaugh à 3 éléments

- Dans une table de Karnaugh, les entrées sont en haut et/ou à gauche:
  - A 3 éléments, il va y avoir 2 éléments en haut et 1 à gauche
  - OU, 1 élément en haut et 2 à gauche... Aucune différence
- Commençons avec la version <u>incorrecte</u> de Karnaugh...

X \ YZ	00	01	10	11
0				
1				

Karnaugh à 3 éléments

- Deux cases adjacentes peuvent être simplifiées parce qu'il y a UN changement
  - Toutes les variables restent pareilles sauf UNE
  - On peut donc simplifier...
- Prenons un exemple avec notre (fausse) table

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z}$$

X \ YZ	00	01	10	11
0		1	1	
1				

Ça dit qu'on peut simplifer... est-ce c'est vrai?

Karnaugh à 3 éléments

- La table dit qu’on peut simplifier ces termes, mais c’est faux. $F = \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z}$
  - Y et Z changent en même temps
  - Pour simplifier, il faut que UN seul change
- Problème: Ces 2 cases adjacentes ne se simplifient pas
  - Elles ne devraient pas être adjacentes parce qu’il y a plus qu’une variable qui changent...

X \ YZ	**00**	**01**	**10**	**11**
0				
1				

Karnaugh à 3 éléments

- Il faut donc modifier la table pour que 2 cases adjacentes aient seulement 1 changement:

X \ YZ	00	01	10	11
0				
1				

- Maintenant, 2 cases collées auront TOUJOURS seulement 1 changement de litéraux:

X \ YZ	00	01	11	10
0				
1				

YZ=00 et YZ=10
sont aussi adjacentes

Ça c'est la bonne version de la table de Karnaugh à 3 entrées

Exercice

- Avec la table de Karnaugh, simplifiez la fonction suivante:

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}YZ$$

Exercice

- On copie les éléments dans la table

$$F = \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}YZ$$

X \ YZ	00	01	11	10
0		1	1	
1				

- Qu'est-ce qui est stable? X'Z
- Qu'est-ce qui varie? Y

$$F = \overline{X}Z$$

Exercice (seul)

- Simplifiez la fonction suivante:

$$F = X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z$$

Exercice (seul)

- On copie les éléments dans la table:

$$F = X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z$$

- On pense à 3 solutions possibles (ou plus)
  - Le premier est celui-ci:

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1		

$$F = X\overline{Y} + \overline{X}\,\overline{Y}$$

  - Le deuxieme est

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1		

$$F = \overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{Y}Z$$

Exercice (seul)

- Avant de passer au troisième, on regarde les 2 solutions précédentes:

$$F = X\overline{Y} + \overline{X}\,\overline{Y}$$

$$F = \overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{Y}Z$$

- Les deux peuvent être simplifiées:

$$F = \left(X + \overline{X}\right)\overline{Y} = \overline{Y}$$

$$F = \overline{Y}\left(\overline{Z} + Z\right) = \overline{Y}$$

- Notre solution n'était donc pas optimale...

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1		

Exercice (seul)

- En regardant la table, on peut remarquer que:
  - Dans les 4 cas, Y est TOUJOURS 0
  - Les cases représentent XZ=00, 01, 10 et 11
  - Donc, X et Z peuvent etre N'IMPORTE QUOI en autant que Y est 0
- Dans ce cas, on peut regrouper les 4 termes:

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	1		
1	1	1		

Conclusion

- On va toujours vouloir regrouper la plus grosse quantité de boîtes adjacentes
  - Il faut qu'ils soient en puissance de 2: 2, 4, 8, 16, etc.
  - On devrait regrouper les termes déjà groupés SI ça aide à grouper des termes libres dans des plus gros blocs

X \ YZ	00	01	11	10
0		1		
1	1	1	1	

X \ YZ	00	01	11	10
0		1		
1	1	1	1	

$$F = X\overline{Y} + \overline{X}\,\overline{Y}Z + XYZ$$

VS

$$F = X\overline{Y} + \overline{Y}Z + XZ$$

Exemple (seul)

- Simplifiez la fonction definie par la somme de minterms suivante:

$$F(X,Y,Z) = \sum(0,1,2,3,6,7)$$

- Traduction: XYZ = 000, 001, 010, 011, 110 et 111
- Traduction #2: $\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}YZ + XY\overline{Z} + XYZ$

Exemple (seul)

- On commence par remplir la table:
  - 0,1,2,3,6,7=000, 001, 010, 011, 110 et 111
  - Un “truc” peut etre de numéroter les cases avant de commencer:

X \ YZ	00	01	11	10
0	1 (0)	1 (1)	1 (3)	1 (2)
1	(4)	(5)	1 (7)	1 (6)

Exemple (seul)

- Une fois termine, on regroupe (en chevauchant au besoin)

$\overline{X}$

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1			1	1

Y

$$F = \overline{X} + Y$$

Karnaugh à 4 éléments

- Avec les fonctions a 4 termes, c’est la meme chose:
  - Seule chose a se rappeler c’est que la sequence est 00, 01, 11 et puis 10...

CD **AB**	**00**	**01**	**11**	**10**
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Karnaugh à 5 éléments

- Considerons une fonction a 5 elements

$$F(A,B,C,D,E)=\sum(0,2,4,6,9,13,21,23,25,29,31)$$

- On peut utiliser la meme technique..

CDE / AB	000	001	011	010	110	111	101	100
00	1			1	1			1
01		1					1	
11		1				1	1	
10						1	1	

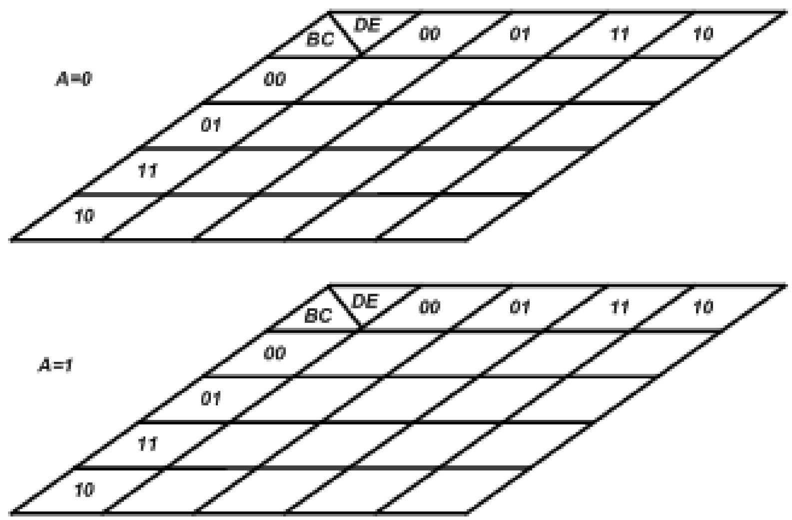
Karnaugh à 5 éléments

- Ca fonctionne, mais ce n’est pas optimal
  - Des cases avec seulement 1 literal qui change devraient etre adjacentes (pour pouvoir simplifier)
- 110 et 100 ont 1 literal qui change
  - Mais ils ne sont pas adjacent... Ca ne permet pas de les encercler..

CDE / AB	**000**	**001**	**011**	**010**	**110**	**111**	**101**	**100**
00	1			1	1			1
01		1					1	
11		1				1	1	
10						1	1	

Karnaugh à 5 éléments

- Pour que ca fonctionne, il faut changer la forme:
  - La table de Karnaugh a 5 elements sera tri-dimensionnelle
  - Elle sera composee de 2 tables de Karnaugh de 4 elements



Karnaugh à 5 éléments

- On a donc 2 tables:
  - Une pour A=0 et une pour A=1
  - Les regroupements en vert combinent des elements des 2 tables

$$F(A,B,C,D,E)=\sum(0,2,4,6,9,13,21,23,25,29,31)$$

BC \ DE	00	01	11	10
00	1 0	1	3	1 2
01	1 4	5	7	1 6
11	12	1 13	15	14
10	8	1 9	11	10

A=0

BC \ DE	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	1 21	1 23	22
11	28	1 29	1 31	30
10	24	1 25	27	26

A=1

Karnaugh à 5 éléments

A=0

DE / BC	00	01	11	10
00	1 0	1	3	1 2
01	1 4	5	7	1 6
11	12	1 13	15	14
10	8	1 9	11	10

A=1

DE / BC	00	01	11	10
00	16	17	19	18
01	20	1 21	1 23	22
11	28	1 29	1 31	30
10	24	1 25	27	26

- Pour le regroupement rouge dans A=0, les termes stables sont: B'E'
- Pour le regroupement rouge dans A=1, les termes stables sont: CE
- Pour le vert, les termes stables sont: BD'E

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{E} + ACE + B\overline{D}E$$

Karnaugh pour maxterm

- À la place de travailler avec les minterms, on peut travailler avec les maxterms
  - À la place de regrouper les ‘1’, on regroupe maintenant les ‘0’
- Le resultat final sera un produit de sommes
  - Le résultat final est aussi INVERSÉ
  - Il faudra le ré-inverser
- Expliquons ça avec un exemple

Exemple

- Simplifiez la fonction suivante en utilisant la table de karnaugh avec les maxterms

$$F(A,B,C,D)=\sum\left(0,1,2,5,8,9,10\right)$$

Exemple

- La facon classique est de faire ressortir les minterms:
  - Chaque minterm correspond à un ‘1’

$$F(A,B,C,D)=\sum(0,1,2,5,8,9,10)$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01		1		
11				
10	1	1		1

À la place, on peut s’interesser aux ‘0’...

Exemple

- On met les zéros et on les combine:
  - Les zéros sont les places où on n’a pas de ‘1’
  - On se rappelle que ça donne F’

CD / AB	00	01	11	10
00			0	
01	0		0	0
11	0	0	0	0
10			0	

$$\overline{F} = AB + CD + B\overline{D}$$

Exemple

- Il faut maintenant inverser la fonction:

$$\overline{F} = AB + CD + B\overline{D}$$

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{AB + CD + B\overline{D}}$$

- On applique DeMorgan:

$$F = \overline{AB} \bullet \overline{CD} \bullet \overline{B\overline{D}}$$

- On l'applique encore une fois...

$$F = \left(\overline{A} + \overline{B}\right) \bullet \left(\overline{C} + \overline{D}\right) \bullet \left(\overline{B} + D\right)$$

Non-défini (“don’t care”)

- Il existe parfois des cas où les fonction ne sont pas entierèment définies
  - Imaginez une fonction qui détecte si un nombre DÉCIMAL est 6 ou plus
  - Que fait-on quand l’entrée est A, B, C, D, E ou F?
  - Ça peut être 0 tout comme ça peut être 1. Ça ne nous dérange pas. On met X..

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

Non-défini ("don't care")

- Avec les X, on peut les combiner ou on peut les laisser libre
  - On les utilise à notre avantage

CD / **AB**	**00**	**01**	**11**	**10**
00				
01			1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

$$F = A + BC$$

Implémentation avec NON-ET

- On a vu que toute fonction logique pouvait être faite avec NON, ET et OU
  - On fait le tableau de vérite
  - On sort les minterm/maxterm
  - On simplifie et on implémente avec NON, ET et OU...
- On va voir maintenant que toute fonction peut aussi implementée avec NON-ET
  - Et dans quelques powerpoints, on va voir que ça se fait aussi avec NON-OU...

Implémentation avec NON-ET

- Prenons une fonction quelconque faite avec ET-OU:

$$F = AB + CD + EF$$

- En faisant une double négation, ça ne change rien...

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{AB + CD + EF}}$$

- Je développe une des inversions:

$$F = \overline{\overline{AB} \bullet \overline{CD} \bullet \overline{EF}}$$

Et j'ai une fonction faite entièrement de NON-ET...

Exemple (seul)

- Transformez cette fonction en implementation NON-ET
  - Les literaux peuvent etre positifs ou leurs inverses.

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{E} + ACE + B\overline{D}E$$

Exemple (seul)

- L’équation de départ est:

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{E} + ACE + B\overline{D}E$$

- On peut faire une double négation:

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{E} + ACE + B\overline{D}E}}$$

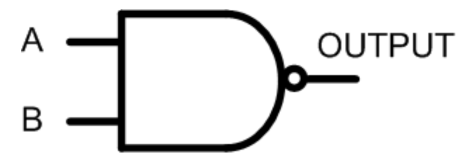
- On développe une des négations

$$F = \overline{\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{E}} \bullet \overline{ACE} \bullet \overline{B\overline{D}E}}$$

Implementation avec NON-ET

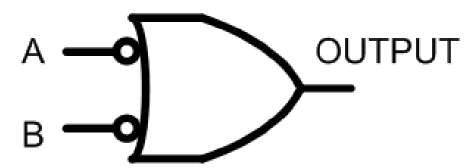
- On peut aussi prendre une approche plus graphique...
  - Cependant, il faut dériver cette approche
- On sait qu'un NON-ET ressemble à ceci:

$$OUTPUT = \overline{A \bullet B}$$



- Selon DeMorgan, on peut aussi écrire ceci:

$$OUTPUT = \overline{A} + \overline{B}$$



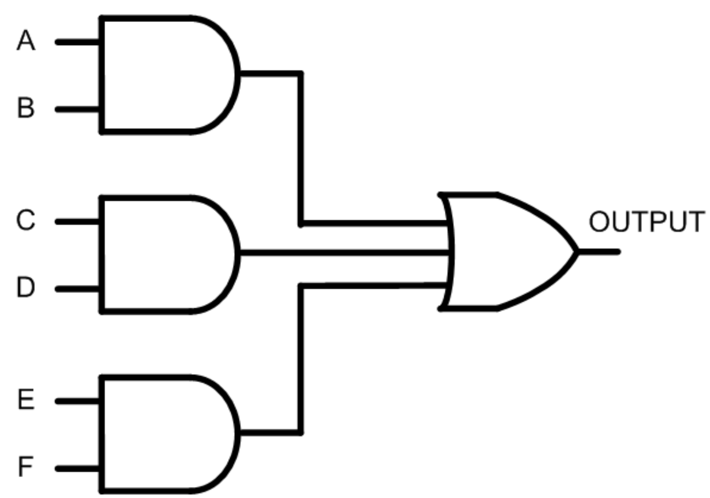
La boule represente une inversion...

Implementation avec NON-ET

- Considérons la fonction de tantôt:

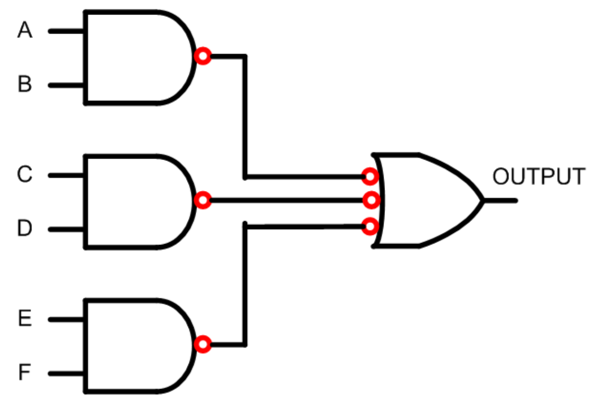
$$F = AB + CD + EF$$

  - Je peux l'implémenter avec des portes ET et OU



Implementation avec NON-ET

- On sait qu'une boule c'est une inversion
  - Deux boules devraient donc rien changer...
- Si j'ajoutais 2 boules en série, j'aurais aucun changement:



  - Et en même temps, on remarque toutes les 4 portes sont des NON-ET

$$F = AB + CD + EF = \overline{\overline{AB} \bullet \overline{CD} \bullet \overline{EF}}$$

Approche graphique

- Sous la forme standard, on peut implementer un circuit en NON-ET directement:
  - Pour le premier niveau de portes, on dessine NON-ET à la place de ET
  - Pour le deuxième niveau de portes, on dessine NON-ET sous la forme “boule-OU”
  - On connecte le premier étage au deuxième
  - Si une entrée va directement au deuxième étage, on devrait l’inverser pour annuler la boule du “boule-OU”

Exemple (Ex. 3.10)

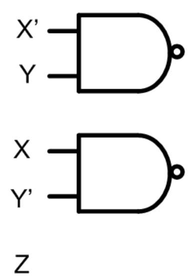
- On veut implementer la fonction suivante seulement avec NON-ET:

$$F = X\overline{Y} + \overline{X}Y + Z$$

- (Note: notre exemple est une PARTIE de l'exemple 3.10 du livre...)

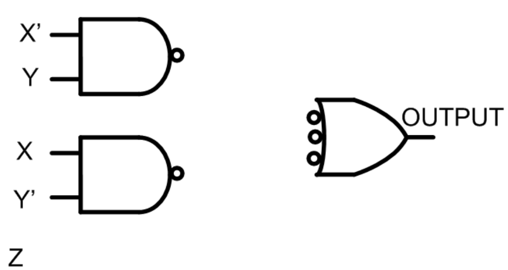
Exemple (Ex. 3.10)

- Premiere etape: dessiner NON-ET à la place de ET



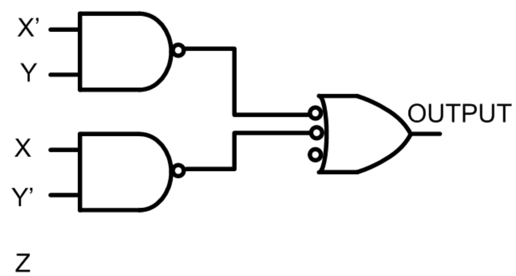
$$F = X\overline{Y} + \overline{X}Y + Z$$

- Deuxième étape: dessiner "Boule-OU" à la place de OU



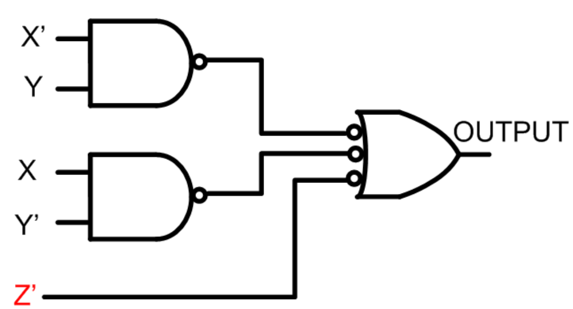
Exemple (Ex. 3.10)

- Troisième étape: Connecter les 2 niveaux



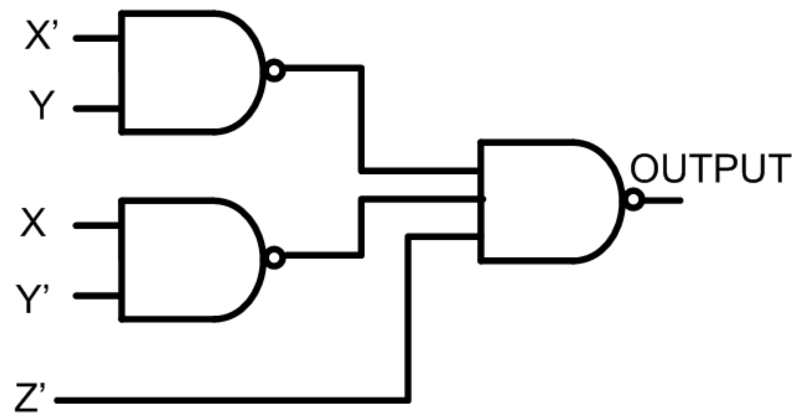
$$F = X\overline{Y} + \overline{X}Y + Z$$

- Quatrième etape: On ne peut pas connecter Z à l’entrée du 2e niveau.
  - Il n’a pas de boule pour annuler la boule du OU
  - Il faut l’inverser



Exemple (Ex. 3.10)

- Finalement, pour l'esthétique, on change le "boule-OU" pour un NON-ET (même chose)



$$F = X\overline{Y} + \overline{X}Y + Z$$

Implementation avec NON-OU

- Avec les portes NON-ET, on est capable d'implémenter n'importe quelle fonction:
    - Il suffit que ce soit exprimé sous forme de minterms
- On peut faire la même chose avec les portes NON-OU
    - Dans ce cas, il faut que ce soit exprimé sous forme de maxterms

Implementation avec NON-OU

- On veut implémenter ceci avec NON-OU...

$$F = (A+B)(C+D)(E+F)$$

- Il faudrait faire une double négation:

$$F = \overline{\overline{F}} = \overline{\overline{(A+B)(C+D)(E+F)}}$$

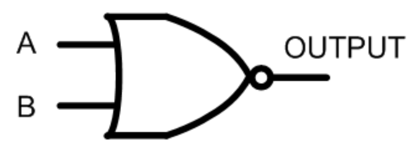
- Utiliser DeMorgan pour une négation

$$F = \overline{\overline{(A+B)}+\overline{(C+D)}+\overline{(E+F)}}$$

Approche graphique

- Comme avec la methode NON-ET, on peut aussi y aller de façon purement graphique
- Il faut se rappeler que le NON-OU c'est:

$$OUTPUT = \overline{A + B}$$



- Et avec DeMorgan, ça devient:

$$OUTPUT = \overline{A} \bullet \overline{B}$$

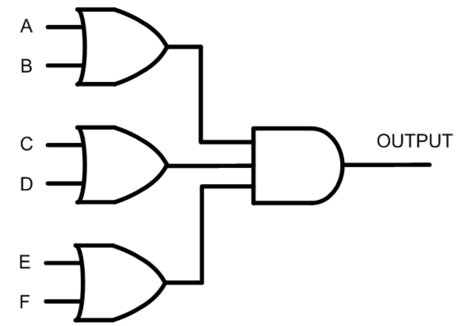
Approche graphique

- Sous la forme standard, on peut implémenter un circuit en NON-OU directement:
  - Pour le premier niveau de portes, on dessine NON-OU à la place de OU
  - Pour le deuxième niveau de portes, on dessine NON-OU sous la forme “boule-ET”
  - On connecte le premier étage au deuxième
  - Si une entrée va directement au deuxième étage, on devrait l’inverser pour annuler la boule du “boule-ET”

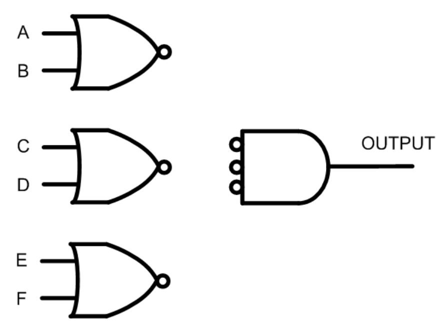
Approche graphique

- On commence par l'approche normale:

$$F = (A+B)(C+D)(E+F)$$

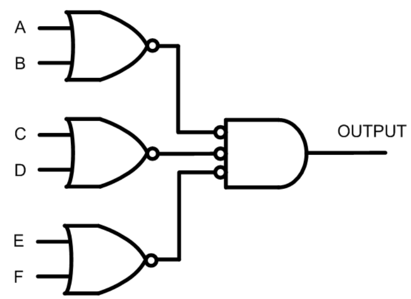


- On remplace les portes:
  - Le premier niveau par NON-OU
  - Le deuxième niveau par "Boule-ET"

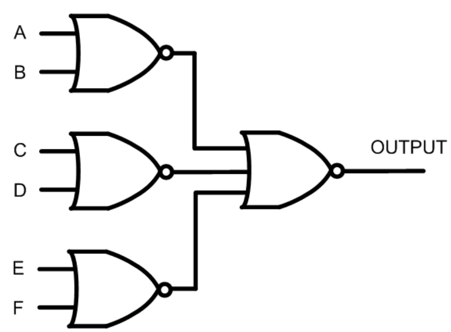


Approche graphique

- On fait les connexions



- On remplace le “boule-ET” par NON-OU...



$$F = \overline{\overline{(A+B)} + \overline{(C+D)} + \overline{(E+F)}}$$