UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI

ALGÈBRE LINÉAIRE

(SYSTÈMES, MATRICES, DÉTERMINANTS)

COMPLÉMENT DE MATHÉMATIQUE

8GMA 050

PAR : Claude BOUCHER

et

Jean-Pierre SAGNET

A. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Définition 1 : Systèmes à 2 inconnues et 2 équations

C'est tout ensemble de 2 égalités simultanées de la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}}$$

, où a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 sont des constantes réelles (Connues, et x et y les inconnues (à trouver).

Exemple :
$$\begin{aligned} 5x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

Ici : $a_{11} = 5$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -1$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$

Définition 2 : Systèmes à 3 inconnues et 3 équations

C'est tout ensemble de 3 égalités simultanées de la forme :

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}}$$

, où a_{11}, a_{12}, ..., b_1, b_2, b_3 sont des Constantes réelles (Connues).
et x, y, z les inconnues (à trouver).

Exemple :

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x - y - z &= 2 \end{aligned}$$

Définition 3 : Systèmes à n inconnues et m équations

c'est tout ensemble de m égalités simultanées de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots\cdots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots\cdots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \cdots\cdots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

, où les a_{ij} sont des constantes réelles (connues) et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les inconnues (à trouver).

Exemple : Un système à 4 équations et 5 inconnues

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 &= 1 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 15 \end{aligned}$$

Remarque : Face à un système d'équations linéaires, le problème consiste à trouver la (ou les) valeurs des inconnues : cela s'appelle "RÉSOUDRE LE SYSTÈME".

B. RÉSOLUTION DE SYSTÈMES PAR DES PROCÉDÉS DITS DE SUBSTITUTION – ÉLIMINATION

Ces procédés s'adressent aux systèmes ayant peu d'inconnues (2 ou 3) ou des systèmes simples au niveau des coefficients a_{ij}.

Exemple 1 : Résoudre le système :

$$(1) : \quad x + 2y = 1$$
$$(2) : \quad x - y = 2$$

• 1ère façon : Par substitution :

(1) donne : $\quad (3) : \quad x = 1 - 2y$

, valeur que nous reportons dans (2) :

$$1 - 2y - y = 2$$
$$1 - 3y = 2$$
$$-3y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}$$

, d'où : $x = 1 - 2y = 1 - 2\left(-\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

D'où, la solution de ce système : $x = \frac{5}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$

• 2e façon : Par élimination :

En multipliant membre à membre l'équation (2) par 2, on obtient le système :

$$x + 2y = 1$$
$$2x - 2y = 4$$

Ensuite additionnons membre à membre :

$$3x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{3}$$

, puis reportons cette valeur dans l'une ou l'autre des 2 équations du système, par exemple dans (1) :

$$\frac{5}{3} + 2y = 1$$

$$2y = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

Remarque : En cours de démarche de résolution, on peut utiliser soit la substitution, soit l'élimination, ou l'une ou l'autre alternativement.

Exemple 2 : Résoudre le système :

$$\begin{aligned}
(1) :&\quad 3x + 2y + 4z = 1 \\
(2) :&\quad 2x - y + z = 0 \\
(3) :&\quad x + 2y + 3z = 1
\end{aligned}$$

• 1ère façon : Par substitution :

(1) donne : (4) : $x = \dfrac{1 - 2y - 4z}{3} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2y}{3} - \dfrac{4z}{3}$

et reportons dans (2) :

$$\frac{2}{3} - \frac{4y}{3} - \frac{8z}{3} - y + z = 0$$

Multiplions par 3 :

$$2 - 4y - 8z - 3y + 3z = 0$$

$$-7y - 5z = -2$$

$$7y + 5z = 2$$

$$7y = 2 - 5z \quad \Rightarrow (5): \quad y = \frac{2-5z}{7}$$

Reportons alors (5) dans (4) et le tout dans (3) :

$$\frac{1 - 2\left(\frac{2-5z}{7}\right) - 4z}{3} + 2\left(\frac{2-5z}{7}\right) + 3z = 1$$

$$\frac{7 - 4 + 10z - 28z}{21} + \frac{4 - 10z}{7} + 3z = 1$$

Multiplions par 21

$$7 - 4 + 10z - 28z + 12 - 30z + 63z = 21$$

$$15 + 15z = 21$$

$$15z = 21 - 15 = 6 \quad \Rightarrow z = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Reportons cette valeur de z dans (5) :

$$y = \frac{2 - 5 \cdot \frac{2}{5}}{7} = \frac{2-2}{7} = \frac{0}{7} = 0$$

, puis reportons ces valeurs de y et de z dans l'une ou l'autre des 3 équations du système présenté, par exemple dans (3) :

$$x + 2(0) + 3\left(\frac{2}{5}\right) = 1$$

$$x + \frac{6}{5} = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}$$

, d'où la solution du système :

$$x = -\frac{1}{5} \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = \frac{2}{5}$$

• 2ᵉ façon : Par élimination :

$$\begin{aligned}
(1) &: 3x + 2y + 4z = 1 \\
(2) &: 2x - y + z = 0 \\
(3) &: x + 2y + 3z = 1
\end{aligned}
\quad \begin{aligned} &\xrightarrow{\times(-3)} (4) : -3x - 6y - 9z = -3 \\ &\xrightarrow{\times(-2)} (5) : -2x - 4y - 6z = -2 \end{aligned}$$

Puis faisons :

$$\left.\begin{aligned}
(1) + (4) &: -4y - 5z = -2 \\
(2) + (5) &: -5y - 5z = -2
\end{aligned}\right\}$$ Système de 2 équations à 2 inconnues : y et z

De cela, on en déduit :

$$\begin{aligned} -4y &= 5z - 2 \\ -5y &= 5z - 2 \end{aligned} \Rightarrow -4y = -5y \Rightarrow 5y - 4y = 0 \Rightarrow y = 0$$

Reportons cette valeur de y dans l'égalité $(1) + (4)$:

$$-4(0) - 5z = -2$$

$$-5z = -2 \Rightarrow z = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

, puis reportons ces valeurs de y et z dans l'une des 3 équations du système présenté, par exemple dans (3) :

$$x + 2(0) + 3\left(\frac{2}{5}\right) = 1$$

$$x + \frac{6}{5} = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}$$

, d'où la solution du système :

$$x = -\frac{1}{5} \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = \frac{2}{5}$$

C. SYSTÈMES ÉQUIVALENTS

<u>Définition</u> : Deux systèmes possédant le même nombre d'équations et le même nombre d'inconnues sont dits "Equivalents", si chaque solution de l'un est aussi solution de l'autre.
On dit aussi qu'ils ont les mêmes ensembles-solution.

<u>Exemple</u> : Soit les systèmes S_1 et S_2 :

$$S_1 : \begin{cases} 7x + 3y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad ; \qquad S_2 : \begin{cases} x = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Ils sont équivalents, chose que l'on note : $S_1 \sim S_2$.
En effet, résolvons chacun d'eux.

• <u>Résolution de S_1</u> :

$$\begin{array}{r} 7x + 3y = 4 \\ -3x - 3y = 0 \\ \hline 4x = 4 \\ x = 1 \end{array}$$

Additionnons membre à membre :

Reportons $x = 1$ dans $x + y = 0 \Rightarrow 1 + y = 0 \Rightarrow y = -1$

Donc la solution de S_1 est : $x = 1$, $y = -1$

• <u>Résolution de S_2</u> : Reportons $x = 1$ dans $x + y = 0$
$\Rightarrow 1 + y = 0 \Rightarrow y = -1$

Donc la solution de S_2 est : $x = 1$, $y = -1$

Il est clair que S_1 et S_2 ont la même solution, ils sont donc équivalents : $S_1 \sim S_2$

<u>Principe de résolution</u> : Pour résoudre un système S_1, on trouve un système équivalent S_2, puis un système équivalent S_3, ---. etc --- jusqu'à un dernier système S_k équivalent aux autres, mais si simple que l'on peut "lire" sur lui la (ou les) solution(s).
On a donc à trouver une suite plus ou moins longue de systèmes équivalents : $S_1, S_2, \dots, S_k$.
Pour obtenir un tel dernier système S_k, il faut effectuer ce que l'on appelle " La Triangulation". cela veut dire qu'à chaque passage : $S_1 \to S_2$, $S_2 \to S_3$, ---, $S_{k-1} \to S_k$ il faut perdre une inconnue dans l'écriture d'une équation.

<u>Exemple</u> :

$$S_1 : \begin{cases} x + 3y + 4z = 19 & : (1) \\ x - y + z = 2 & : (2) \\ x + y - z = 0 & : (3) \end{cases}$$

, dont l'unique solution est : $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

- Remplaçons (2) par (2)−(1) et (3) par (3)−(1) :

$$S_2 : \begin{cases} x + 3y + 4z = 19 & : (1) \\ -4y - 3z = -17 & : (2)' \\ -2y - 5z = -19 & : (3)' \end{cases}$$

Il est visible que $S_1 \sim S_2$.

- Divisons (2') par −2 membre à membre :

$$S_3 : \begin{cases} x + 3y + 4z = 19 & : (1) \\ 2y + \frac{3}{2}z = \frac{17}{2} & : (2)'' \\ -2y - 5z = -19 & : (3)' \end{cases}$$

Evidemment, on voit que : $S_2 \sim S_3$.

- Remplaçons $(3)'$ par $(3)' + (2)''$:

$$S_4 : \begin{cases} x + 3y + 4z = 19 & : (1) \\ \quad 2y + \frac{3}{2} z = \frac{17}{2} & : (2)'' \\ \quad\quad -\frac{7}{2} z = -\frac{21}{2} & : (3)'' \end{cases}$$

On a : $S_3 \sim S_4$.

- Divisons $(3)''$ par $-\frac{7}{2}$:

$$S_5 : \begin{cases} x + 3y + 4z = 19 & : (1) \\ \quad 2y + \frac{3}{2} z = \frac{17}{2} & : (2)'' \\ \quad\quad z = 3 & : (3)''' \end{cases}$$

et : $S_4 \sim S_5$.

Il est clair que la solution $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ est accessible avec S_5 alors qu'elle ne l'était pas avec S_1 et l'on remarque que l'écriture de S_5 a une forme triangulaire, alors que celle de S_1 était rectangulaire. Avec S_5, on peut achever la résolution : $\boxed{z = 3}$, reportons dans $(2)''$:

$$2y + \frac{9}{2} z = \frac{17}{2}$$

$$\Rightarrow 2y = \frac{17-9}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \Rightarrow \boxed{y = 2}$$

et reportons les valeurs de z et y dans (1) :

$$x + 6 + 12 = 19 \Rightarrow x = 19 - 18 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

<u>Opérations élémentaires de ligne</u> : les divers passages : $S_1 \to S_2$, $S_2 \to S_3$, ---, $S_{k-1} \to S_k$ se font grâce à 3 opérations, dites "opérations élémentaires de ligne", qui sont :

E1 : Intervertir la position de 2 équations quelconques.

E2 : Remplacer toute équation par un multiple non nul de cette équation :

E3 : Remplacer toute équation par l'équation résultant de l'addition de l'équation et d'un multiple non nul d'une autre équation.

Remarque : E3 peut souvent être remplacée avantageusement par :

E4 : Remplacer toute équation par l'équation résultant de l'addition d'un multiple non nul de cette équation et d'une combinaison linéaire d'autres équations

par exemple : remplacer l'Equation (1) par :

3 l'Equation (1) − 5 l'Equation (2)

• Sur l'exemple du système S_1 résolu précédemment, on a fait :

$$S_1 \xrightarrow{E3} S_2 \xrightarrow{E2} S_3 \xrightarrow{E3} S_4 \xrightarrow{E2} S_5$$

Cette séquence suivie n'est pas la seule possible, d'autres peut-être plus simples existent, en effet on voit que

(2) + (3) : $2x = 2$, donne directement $x = 1$, - - - - ...

D. MATRICES

<u>Définition</u> : Une "Matrice" est un tableau à forme rectangulaire (ou carrée) rempli de nombres réels écrits en lignes (et en colonnes).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

les nombres a_{ij} sont les "éléments" de la matrice.
La matrice A possède m lignes et n colonnes et a m n éléments. On dit qu'elle est de "type (m,n)".

- Lorsque $m = n$, la matrice A est "carrée" et au lieu de type (n,n), on dit qu'elle est "d'ordre n".

- Exemple 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

est une matrice de type $(2,3)$. Ses éléments sont :
$a_{11} = 2$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = -1$, $a_{21} = 5$, $a_{22} = 4$, $a_{23} = 2$.

- Exemple 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

est une matrice carrée d'ordre 2. Ses éléments sont :

$a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 4$

Egalité de 2 matrices :

Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont dites "égales" si :

$$\begin{cases} \text{type } A = \text{type } B \\ a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$

, donc : { même nombre de lignes.
même nombre de colonnes.
les éléments situés aux mêmes endroits sont égaux.

• Exemple : On ne peut avoir : $\begin{pmatrix} x & 1-y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

que si $x = 1$ et $y = 1$

Somme de 2 matrices de même type :

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

• Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Produit d'une matrice par un scalaire :

$$k\,(a_{ij}) = (k\,a_{ij})$$

• Exemple :

$$5\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Produit de 2 matrices</u> : Soit les 2 matrices :

A de type (m, n) et B de type (n, p)

(le nombre de colonnes de A = le nombre de lignes de B).

, avec :

$$AB = (c_{ik}) = (a_{ij})(b_{jk}) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}\right)$$

$$\boxed{c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}}$$

"Multiplication de lignes par colonnes".

Il est clair que si AB existe, $\boxed{\text{type}(AB) = (m, p)}$

• <u>Exemple 1</u> :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(7) + 2(8) + 3(9) \\ 4(7) + 5(8) + 6(9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

• <u>Exemple 2</u> :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1) + 1(-1) & 2(2) + 1(-2) \\ 3(1) + 5(-1) & 3(2) + 5(-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>Remarques</u> : Si AB existe, en général BA n'existe pas. Lorsque AB et BA existent toutes deux, en général $AB \neq BA$.

<u>Matrice nulle de type (m,n)</u> : La seule et unique matrice de type (m,n) dont tous les éléments sont nuls.

. <u>Exemple</u> : La matrice nulle de type $(3,2)$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Opposée d'une matrice</u> : Soit A une matrice de type (m,n). "L'opposée" de A, est la matrice notée $-A$, de type (m,n) telle que :

$$A + (-A) = \text{La matrice nulle de type } (m,n)$$

. <u>Exemple</u> : L'opposée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ est la matrice : $-A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

<u>Matrice identité d'ordre n</u> : La seule et unique matrice d'ordre n dont tous les éléments sont nuls, sauf ceux de la diagonale, qui valent 1 :

$$a_{ij} = 0 \quad , \text{ si } i \neq j$$
$$a_{ii} = 1$$

. <u>Exemples</u> : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 2.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice identité d'ordre 3.

Les matrices identité sont des exemples de matrices diagonales. et $AI = A$ ou $IA = A$, chaque fois que le 1er membre existe.

E. UTILISATION DES MATRICES À LA RÉSOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Ecriture matricielle d'un système : le système :

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11} x_1 & + & a_{12} x_2 & + \cdots + & a_{1n} x_n & = & b_1 \\
a_{21} x_1 & + & a_{22} x_2 & + \cdots + & a_{2n} x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} x_1 & + & a_{m2} x_2 & + \cdots + & a_{mn} x_n & = & b_m
\end{array}$$

peut s'écrire matriciellement sous la forme :

$$\boxed{AX = B}$$

où :

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la matrice des inconnues.

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ est la matrice des seconds membres.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ est la "matrice du système"

, c'est la matrice des "coefficients" des inconnues.

<u>Matrice augmentée d'un système</u> : Elle renferme à la fois les coefficients a_{ij} et les seconds membres b_i : on la note :

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

<u>Matrices augmentées équivalentes et principe résolutoire</u> :

Deux matrices augmentées de mêmes types sont dits "équivalentes" si l'on passe de l'une à l'autre par une ou plusieurs des opérations élémentaires de lignes E_1, E_2, E_3.

On note alors : $\boxed{(A_1 \mid B_1) \sim (A_2 \mid B_2)}$

plus avant, on a vu comment résoudre un système S_1 en passant de S_1 à S_2 équivalent, puis à S_3 équivalent, --- etc --- et ce grâce aux opérations élémentaires de ligne. lorsque l'on connait les symboles des inconnues, il est inutiles de les trainer à toutes les étapes. En fait, il suffit de travailler sur la matrice augmentée du système $(A_1 \mid B_1)$ et de l'équivaloir successivement en vue d'une triangulation :

$$(A_1 \mid B_1) \sim (A_2 \mid B_2) \sim \cdots \sim (A_k \mid B_k)$$

A la toute fin, avec $(A_k \mid B_k)$, on remet les inconnues.

Résolution d'un système par la méthode de GAUSS :

- On travaille sur la matrice augmentée du système $(A_1|B_1)$, jusqu'à ce que le résultat $(A_k|B_k)$ ait une partie gauche A_k triangulaire.
- Quitte à permuter 2 lignes ou à diviser par un coefficient, on s'arrange à partir avec une $(A_1|B_1)$ dont la première ligne : "ligne Pivot" comporte la première inconnue avec le coefficient 1.
- Ensuite grâce aux opérations E_1, E_2, E_3, on fait apparaître le plus de "zéros" possible sous la diagonale (ou la pseudo-diagonale), ce qui est la "triangulation".
- Exemple 1 : Résoudre le système : S_1 : $\begin{cases} x+y=0 \\ 7x+3y=4 \end{cases}$

$$(A_1|B_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right) = (A_2|B_2)$$

E_3 : 2° ligne $\mapsto$ 2° ligne − 7(1° ligne).

A_2 est triangulaire. On ré-écrit le système :

$$x+y=0$$
$$-4y=4 \longrightarrow y=-1$$
$$\downarrow$$
$$x=-y=-(-1)=1$$

, d'où la solution : $x=1$, $y=-1$

• <u>Exemple 2</u> : Résoudre le système :

$$S_1 : \begin{cases} x + 3y + 4z = 19 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$(A_1 \mid B_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 19 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$2^{\underline{o}}L \mapsto 2^{\underline{o}}L - 1^{\underline{o}}L$

$3^{\underline{o}}L \mapsto 3^{\underline{o}}L - 1^{\underline{o}}L$

$$\wr\ E_3$$

$$(A_2 \mid B_2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 19 \\ 0 & -4 & -3 & -17 \\ 0 & -2 & -5 & -19 \end{array}\right)$$

$2^{\underline{o}}L \mapsto -\frac{1}{2}\left(2^{\underline{o}}L\right)$

$$\wr\ E_2$$

$$(A_3 \mid B_3) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 19 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & -2 & -5 & -19 \end{array}\right)$$

$3^{\underline{o}}L \mapsto 3^{\underline{o}}L + 2^{\underline{o}}L$

$$\wr\ E_3$$

$$(A_4 \mid B_4) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 19 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{21}{2} \end{array}\right)$$

$3^{\underline{o}}L \mapsto -\frac{2}{7}\left(3^{\underline{o}}L\right)$

$$\wr\ E_2$$

$$(A_5 \mid B_5) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 19 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

d'ou le système triangulaire S_5 :

$$S_5 : \begin{cases} x + 3y + 4z = 19 \\ 2y + \frac{3}{2} z = \frac{17}{2} \\ z = 3 \end{cases}$$

Ce que l'on vient de faire (par la méthode de GAUSS) est strictement la même chose que ce que l'on a fait aux pages -8-, -9-, -10- où l'on avait alors la séquence :

$$S_1 \xrightarrow{E_3} S_2 \xrightarrow{E_2} S_3 \xrightarrow{E_3} S_4 \xrightarrow{E_2} S_5$$

L'avantage de la méthode de GAUSS, c'est de ne pas trainer tout le temps les symboles des inconnues, on a là un travail purement matriciel.

F. DÉTERMINANTS

Soit A une matrice carrée. On va créer un nombre, caractéristique de la matrice A et fort important : "Le déterminant" de A, noté soit det A, soit $|A|$.

. Déterminant d'une matrice d'ordre 2 :

Soit : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le "déterminant" de la matrice A est le nombre réel :

$$\boxed{\det A = ad - bc} \quad ; \text{ on le note aussi : } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

. Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$ est le déterminant de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

__Remarque__ : Un déterminant est un nombre, tandis qu'une matrice ne l'est pas. Sauf dans le cas d'une matrice d'ordre 1, que l'on identifie par définition au seul élément qu'elle contient :

$$A = (a) = |a| = a$$

. __Déterminant d'une matrice d'ordre 3__ :

Soit : $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

Le "déterminant" de la matrice A est le nombre réel :

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}$$

Sa valeur numérique est alors :

$$\det A = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1(a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

, soit :

$$\det A = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - b_1 a_2 c_3 + b_1 a_3 c_2 + c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2$$

, soit en ordonnant selon les symboles a_i, b_j, c_k :

$$\boxed{\det A = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1}$$

On dit alors que l'on a développé le déterminant selon la première ligne.

• **Déterminant d'une matrice d'ordre 4 :**

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$ une matrice carrée d'ordre 4.

Le "déterminant" de la matrice A est le nombre :

$$\boxed{\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\ &+ c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \end{aligned}}$$

$=$ ......etc......: On développe les 4 déterminants d'ordre 3 selon leur définition et ce pour abouti à la valeur numérique de det A.

Dans la définition précédente, on dit que l'on a développé le déterminant selon la première ligne.

• <u>Déterminant d'une matrice quelconque A d'ordre n</u> :

Tout-à-fait analoguement, on développe $\det A$ selon la première ligne.

• <u>Terminologie</u> : Soit A une matrice carrée d'ordre n :

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \leftarrow i^{o} \text{ ligne} \\ \uparrow \; j^{o} \text{ Colonne} & \end{array}$$

a_{ij} est l'élément au carrefour de la i^{o} ligne et de la j^{o} colonne.

On appelle "déterminant mineur de a_{ij}" ou "mineur de a_{ij}", le déterminant de dimension $(n-1)\times(n-1)$ obtenu en supprimant dans $\det A$ la i^{o} ligne et la j^{o} colonne. On le note M_{ij}.

Par exemple, avec un déterminant de dimension 3×3, développé selon sa première ligne :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 M_{11} - b_1 M_{12} + c_1 M_{13}$$

, M_{11} est le "mineur" de l'élément a_1, ... etc ...

Par exemple, avec le déterminant de dimension 4×4, développé selon sa première ligne, on a : (p. -21-) :

$$\det A = a_1 M_{11} - b_1 M_{12} + c_1 M_{13} - d_1 M_{14}$$

• <u>Exemple 1</u> : Calculer le déterminant de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Développons selon la définition p. -20-, le déterminant :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 1.\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1.\big(5(9) - 6(8)\big) - 2.\big(4(9) - 6(7)\big) + 3.\big(4(8) - 5(7)\big)$$

$$= 1.(45-48) - 2.(36-42) + 3(32-35)$$

$$= 1.(-3) - 2.(-6) + 3.(-3) = -3 + 12 - 9 = 0$$

Donc, on peut écrire :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Remarque</u> : lorsque l'on développe un déterminant selon sa première ligne, si l'un des éléments de cette ligne est 0, il devient alors inutile de calculer son mineur, puisque ce résultat (Élément × Son mineur) sera 0. Cela est de nature à alléger les calculs !

· <u>Exemple 2</u> : Calculer le déterminant 4×4 suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.M_{11} - \cancel{\underbrace{0.M_{12}}_{=0}} + 2.M_{13} - \cancel{\underbrace{0.M_{14}}_{=0}}$$

Inutile de calculer les 2 dét. 3×3, M_{12} et M_{14}.

$$= 1.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$: Même attitude simplificatrice !

$$= 1.\left[1.\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right] + 2.\left[-1.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 1.\left[1.(0-0) + 2(0-4)\right] + 2\left[-(0-0) + 2(2-0)\right]$$

$$= 1.(0-8) + 2.(0+4) = 1.(-8) + 2.(4) = -8 + 8 = 0$$

Donc, on peut écrire :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Vision Combinatoire d'un déterminant</u> : On a remarqué que dans le développement d'un déterminant selon sa première ligne, il y a alternance de signes affectant les produits : (Elément × Son mineur).
On remarque aussi que dans le résultat numérique final on a une somme de produits en alternance de signes, chacun de ces produits comprend une lettre de chaque colonne, chacune d'elle n'appartenant pas à la ligne des autres.
. Pour se fixer les idées, reprenons le déterminant 3×3 de la page -20-, où l'on avait :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det A$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1$$

On peut alors écrire :

$$\boxed{\det A = \sum_{\substack{i,j,k \\ \text{différents}}} (-1)^{\tau} a_i \, b_j \, c_k}$$

, où τ = le nombre d'interversion observé dans le triplet (i, j, k) par rapport au triplet $(1, 2, 3)$.

. <u>Ex</u> : Signe devant $a_1 b_2 c_3 = (-)^0 = +$, car il n'y a pas d'inversion de $(1, 2, 3)$ par rapport à $(1, 2, 3)$.

<u>Ex</u> : Signe devant $a_1 b_3 c_2 = (-)^1 = -$, car il y a 1 inversion de $(1, 3, 2)$ par rapport à $(1, 2, 3)$.

Ex : Signe devant $a_2 b_3 c_1 = (-)^2 = +$, car il y a 2 interversions de $(2,3,1)$ par rapport à $(1,2,3)$.

Ex : Signe devant $a_3 b_2 c_1 = (-)^3 = -$, car il y a 3 interversions de $(3,2,1)$ par rapport à $(1,2,3)$.

- Cette logique développé pour l'ordre 3, se perpétue à tous les ordres.

<u>Règle de LAPLACE</u> . <u>Développement d'un déterminant selon une rangée quelconque</u>.

Une "rangée" est soit une ligne, soit une Colonne.
les définitions précédentes, nous ont fait adopter la terminologie : << Développement de det A selon sa première ligne >>.
En fait le <u>théorème</u> est maintenant le suivant :

On peut développer un déterminant quelconque selon n'importe quelle de ses rangées et cela en tenant compte du tableau des signes d'affectation associé.

- Pour se fixer les idées, reprenons le déterminant 3×3 de la page -20- ; Appelons-le Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Le tableau des signes d'affectation associé est : $\longrightarrow$ $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

• Développement de Δ selon la 2^e colonne :

$$\Delta = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

• Développement de Δ selon la 2^e ligne :

$$\Delta = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

et ... etc ... L'étudiant(e) pourra vérifier facilement que les résultats numériques de ces 2 dernières écritures sont bien la même chose que celui obtenu de la définition (bas p. – 20 –).

* Ce que l'on vient de signifier à l'ordre 3 est valide à tous les ordres (c'est un véritable THÉORÈME).

* Forts de ce théorème, il est clair, du moins en apparences que l'on a intérêt à développer un déterminant selon la rangée qui contient le plus de **0** :

Exemple : Le plus simplement possible, calculer le déterminant 4×4 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Si l'on utilise la remarque précédente, on a intérêt à développer Δ selon la $2^{\underline{e}}$ ligne. Le tableau des signes d'affectation associé étant :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

, on a sur la $2^{\underline{e}}$ ligne :

$$\Delta = +(1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} :$$

Même logique, on va développer ce nouveau déterminant selon la $2^{\underline{e}}$ ligne (ou la $3^{\underline{e}}$ colonne).

Le tableau des signes d'affectation à l'ordre 3 étant :

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

, on a sur la $3^{\underline{e}}$ colonne par exemple :

$$\Delta = +(4)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(2-8) + (2-3) = -24-1 = -25$$

, donc on peut écrire :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -25$$

G. PROPRIÉTÉS DES DÉTERMINANTS

Ces propriétés constituent de véritables théorèmes.

PROPRIÉTÉ 1 : Si l'on multiplie tous les éléments d'une rangée (ligne ou colonne) d'un déterminant par un nombre k, alors ce nouveau déterminant vaut k fois l'ancien.

Exemple : A l'ordre 2 :

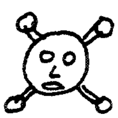
$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Sortir k de la 1ère ligne

Rentrer k sur la 1ère ligne

De même :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$



Attention, ne surtout pas confondre cette propriété des déterminants avec une propriété similaire prévalant sur les matrices :

$$\begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Contrairement aux déterminants, lorsque l'on rentre k dans une matrice, il faut multiplier <u>tous</u> les éléments de la matrice par k.

Exemple :

$$4 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

, ou encore :

$$//$$

$$2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

PROPRIÉTÉ 2 : Un déterminant comportant une rangée de 0 est nul.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 0 & 14 & 15 & 16 \\ 17 & 0 & 18 & 19 & 20 \end{vmatrix} = 0$$

, car tous les éléments de la 2^{e} colonnes sont 0.

PROPRIÉTÉ 3 : Un déterminant comportant soit 2 lignes identiques (ou proportionnelles), soit 2 colonnes identiques (ou proportionnelles) est nul.

Exemple : Celui de l'exemple 2 de la page -24- :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

, car les 1^{e} et 3^{e} lignes sont identiques.

Résultat trouvé p. -24- mais avec plus de labeur !

<u>PROPRIÉTÉ 4</u> : Si l'on interverti 2 lignes ou bien 2 colonnes, alors le nouveau déterminant est l'opposé de l'ancien.

<u>Exemple</u> :
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$
, alors que :
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

<u>GÉNÉRALISATION DE LA PROPRIÉTÉ 4</u> : Si l'on permute toutes les lignes (resp. toutes les colonnes) d'un déterminant Δ, alors le nouveau déterminant vaut : $(-1)^{\tau}\Delta$, où τ est le nombre d'interversions des numéros des lignes (resp. des colonnes) par rapport aux numéros naturels $1, 2, 3, \ldots$

<u>Exemple</u> :
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 8 & 6 \\ 0 & 9 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
: permutation des colonnes.

Car, il a $\tau = 3$ interversions de $(3, 1, 4, 2)$ par rapport à $(1, 2, 3, 4)$

Permutation des lignes :
$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 10 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

, car il y a $\tau = 4$ interversions de $(2, 4, 3, 1)$ par rapport à $(1, 2, 3, 4)$.

PROPRIÉTÉ 5 : Dans un déterminant, on peut remplacer une ligne (resp. une colonne) par elle-même augmentée d'un multiple non nul d'une autre ligne (resp. d'une autre colonne).

Exemple 1 :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + k a_1 & b_2 + k b_1 & c_2 + k c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

: on a ici remplacé la 2^e ligne par elle-même augmentée de k fois la 1^e ligne.

Remarque : Cette propriété est un merveilleux principe permettant de remplacer un déterminant par un autre, égal et ayant une rangée comportant le plus de 0 possibles.

Exemple 1 : celui de l'exemple 2. p-24-

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Car il y a une ligne pleine de 0

En remplaçant la 3^e ligne par elle-même - la 1ère.

Exemple 2 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Car 2 lignes identiques.

2^{e}L $\mapsto$ 2^{e}L - 1^{e}L : Ensuite.
3^{e}L $\mapsto$ 3^e - 2^{e}L : d'abord

<u>GÉNÉRALISATION DE LA PROPRIÉTÉ 5</u> : Dans un déterminant, on peut remplacer une ligne (resp. une colonne) par elle-même augmentée d'une combinaison linéaire d'autres lignes (resp. d'autres colonnes).

<u>Exemple 1</u> :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$5^{e}L \longmapsto 5^{e}L - 4^{e}L - 2^{e}L + 1^{e}L$$

; on aurait pu faire aussi :

$$3^{e}L \longmapsto 3^{e}L - 2(2^{e}L) + 1^{e}L$$

et bien d'autres combinaisons encore et aussi avec les colonnes.

<u>Exemple 2</u> : Calculer le déterminant 5×5 suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 5 & -5 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ : Saturation de la } 2^{e} \text{ ligne en } 0.$$

$$2^{e}C \longmapsto 2^{e}C + 4^{e}C$$

$$5^{e}C \longmapsto 5^{e}C - 4^{e}C$$

; puis développement de Δ sur la 2^{e} ligne !

Compte tenu du tableau des signes d'affectation des 5×5, on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} \begin{vmatrix} -11 & 6 & 3 & 1 \\ -7 & 5 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad : \text{Saturation de la } 3^{\underline{e}} \text{ ligne en } 0$$

$$1^{\underline{o}}C \mapsto 1^{\underline{e}}C - 2(2^{\underline{e}}C)$$

, puis développement de Δ sur la $3^{\underline{e}}$ ligne. Compte tenu du tableau des signes d'affectation des 4×4, on a :

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} -11 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\uparrow}{=} -2\begin{vmatrix} -11 & 3 & 1 \\ -62 & 19 & 0 \\ 14 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad : \text{Saturation de la } 3^{\underline{e}} \text{ colonne en } 0$$

$$2^{\underline{e}}L \mapsto 2^{\underline{e}}L + 5(1^{\underline{e}}L)$$
$$3^{\underline{e}}L \mapsto 3^{\underline{e}}L - 1^{\underline{e}}L$$

, puis développement de Δ sur la $3^{\underline{e}}$ Colonne. Compte tenu du tableau des signes d'affectation des 3×3, on a :

$$\Delta = (-2)(+1)\begin{vmatrix} -62 & 19 \\ 14 & -2 \end{vmatrix} = -2(124-266) = -2(-142) = 284$$

, Donc on peut écrire :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 284$$

H. RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES GRÂCE AUX DÉTERMINANTS

Cette méthode ne s'adresse seulement qu'aux systèmes de CRAMER.

Un système est dit "Système de Cramer" si :

1°) Il est carré (autant d'équations que d'inconnues).

2°) $\det A \neq 0$ (le déterminant de la matrice du système est non nul).

Soit donc un système de Cramer comportant n équations et n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$; dans cet ordre d'écriture.

On note : $\Delta = \det A$: le déterminant de la matrice du système.

et Δ_j = le déterminant Δ dans lequel on a remplacé la j^{e} colonne par la colonne B des seconds membres des équations du système.

<u>THÉORÈME</u> : Pour $j = 1, 2, \dots, n$, la valeur de l'inconnue x_j est donnée par :

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}}$$

, c'est-à-dire :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

<u>Exemple 1</u> : Par la méthode de Cramer, résoudre le système :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Tout d'abord ce système est bien de Cramer, car :

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+1 = 3 \neq 0$$

, donc d'après le théorème :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

, d'où la solution du système : $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{1}{3}$

- <u>Remarque</u> : Un système de Cramer n'a qu'une et une seule solution.

<u>Exemple 2</u> : Par la méthode de cramer, résoudre le système :

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 18 \\ -5x + 7y - 3z = -2 \\ 9x - y + 5z = 13 \end{cases}$$

Ce système est bien de Cramer, car :

$$\det.A = \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 7 & -3 \\ 9 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 14 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} = 1(14) - (-2)(-1) = 14 - 2 = 12 \neq 0$$

, en utilisant les propriétés vues.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 18 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & -3 \\ 13 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 52 & -2 & -3 \\ -77 & 14 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 52 & -2 \\ -77 & 14 \end{vmatrix} = 52(14) - 2(-77) = 728 - 154 = 574$$

, d'où : $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{574}{12}$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 1 \\ -5 & -2 & -3 \\ 9 & 13 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 52 & -3 \\ -1 & -77 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 52 \\ -1 & -77 \end{vmatrix} = -77 + 52 = -25$$

, d'où : $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-25}{12}$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 18 \\ -5 & 7 & -2 \\ 9 & -1 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -25 & 0 & -21 \\ 58 & 0 & 89 \\ 9 & -1 & 13 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1) \cdot \begin{vmatrix} -25 & -21 \\ 58 & 89 \end{vmatrix} = -2225 + 1218 = -1007$$

, d'où : $z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-1007}{12}$

La solution de ce système est donc :

$$x = \frac{574}{12} \ , \ y = -\frac{25}{12} \ , \ z = -\frac{1007}{12}$$

EXERCICES

N° 1. Par des procédés d'élimination - substitution, résoudre chacun des systèmes :

a) $$\begin{aligned} -x + 5y &= 2 \\ 2x + 3y &= -1 \end{aligned}$$; Rép : $x = -\frac{11}{13}$, $y = \frac{3}{13}$

b) $$\begin{aligned} x + y &= -1 \\ -x + 5y + 3z &= 4 \\ x + 13y + 4z &= 10 \end{aligned}$$; Rép. : $x = -\frac{11}{4}$, $y = \frac{7}{4}$, $z = -\frac{10}{4}$

N° 2. Signaler les opérations élémentaires de lignes qui peuvent nous permettre d'affirmer que les systèmes S_1 et S_2 suivants sont équivalents :

$$S_1 : \begin{cases} x + 3y + 4z = 19 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} 2x + 2y + 5z = 21 \\ 4x + 2y - 2z = 2 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

Remarque : on ne demande pas ici de résoudre ces systèmes.

N° 3. En utilisant les opérations élémentaires de lignes E1, E2, E3, triangulariser le système suivant, puis résolvez-le :

$$S_1 : \begin{cases} x + y + z = 9 \\ x - y + z = 3 \\ 4x + 5y - 6z = -11 \end{cases}$$

Rép. pour la solution : $x = 1$, $y = 3$, $z = 5$

N° 4 : Soit les 3 matrices carrées d'ordre 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer les résultats matriciels suivants :

a) $3A + 2B - 5C$; Rép. : $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$

b) $-A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{3}C$; Rép. : $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & 23/6 \\ -7/3 & -35/6 \end{pmatrix}$

N° 5 : En prenant pour matrices A, B, C, celles de l'exercice précédent N° 4, trouver la matrice D telle que :

$$2A + 5B - C + D = 3A - B + 4C$$

Rép. : $\begin{pmatrix} -11 & -36 \\ 7 & 30 \end{pmatrix}$

N° 6. Soit les 3 matrices de type $(3,2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Trouver la matrice D telle que :

$$2A + B + D = 3C$$

Rép. : $\begin{pmatrix} -12 & -3 \\ 6 & -11 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

N° 7. Trouver l'opposée de chacune des matrices :

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

N° 8. Calculer $5A$, si :

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

N° 9. Soit les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le produit AB.

b) BA existe-t-elle ? Dites pourquoi.

N° 10. Soit les 2 matrices d'ordre 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le produit AB.

b) Calculer le produit BA.

c) A-t-on : $AB = BA$?

N° 11. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une quelconque matrice d'ordre 2.

On note : $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle d'ordre 2.

et : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 2.

a) Vérifier que : $A + \mathcal{O} = \mathcal{O} + A = A$

b) vérifier que : $AI = IA = A$

N° 12. On note : $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, ... etc...

Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et B^2

N° 13. En prenant les matrices A et B de l'exercice précédent N° 12, Calculer le produit AB, puis $(AB)^2$, ainsi que $A^2 - B^2$ et le produit $(A+B)(A-B)$. A la suite de cela :

a) A-t-on : $(AB)^2 = A^2B^2$? (alors que c'est le cas avec les nombres réels).

b) A-t-on : $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$? (alors que c'est le cas avec les nombres réels).

N° 14. Trouver une matrice B, carrée d'ordre 2 telle que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

N° 15. Utilisez la méthode de GAUSS (Qui inclut l'utilisation des opérations élémentaires de lignes E1, E2, E3) pour résoudre chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{array}{l} x + 5y = -29 \\ 3x + y = -3 \end{array}$; Rép. : $x = 1$, $y = -6$

b) $\begin{array}{l} x + y = 2 \\ -x + 5y + 2z = -1 \\ 3x - y + 4z = 5 \end{array}$; Rép. : $x = \dfrac{29}{16}$, $y = \dfrac{3}{16}$, $z = -\dfrac{1}{16}$

c) $\begin{cases} x - 4y - 2z = -2 \\ 3x - 5y + z = 4 \\ 2x - y + 2z = -6 \end{cases}$; Rép. : $x = -\frac{142}{7}$
$y = -\frac{74}{7}$
$z = 12$

* d) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y - z = -1 \end{cases}$; Rép. : Une infinité de solutions, de la forme :
$(1, y, 2-y)$ où $y \in \mathbb{R}$.

* e) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + y = 1 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$; Rép. : Aucune solution.

N° 16. Par la règle de LAPLACE, calculer les déterminants :

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$; Rép. : 10

b) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; Rép. : -40

N° 17. De la façon qu'il vous plaira, prouver que :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = b^2(3a+b)$$

Dans quelles circonstances a-t-on $\Delta = 0$?

N° 18. Soit x, y, z trois nombres réels quelconques. Le "déterminant de VANDERMONDE" d'ordre 3 est :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

En utilisant les propriétés 1 à 5 des p. -29- à -34- (donc sans développer le déterminant), prouver que :

$$\Delta = (y-x)(z-x)(z-y)$$

N° 19. Trouver la (ou les) valeur(s) de x telle(s) que :

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & -2 & x \end{vmatrix} = 0$$

N° 20. De la façon qu'il vous plaira, calculer chacun des déterminants suivants :

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$; Rép. : 0

b) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 7 & -8 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & -7 & -6 \\ 5 & 9 & 13 & 2 \end{vmatrix}$; Rép. : 710

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & -6 & 7 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 5 \\ -6 & 5 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 9 & 2 \end{vmatrix}$; Rép. : -2095

d) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{vmatrix}$; Rép. : $\dfrac{1}{2160}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & -6{,}87 \end{vmatrix}$; Rép. : 0

N° 21. Par la méthode de CRAMER, résoudre les systèmes suivants :

a) $3x - 5y = 11$
$7x + 12y = 3$
; Rép. : $x = \frac{147}{71}$, $y = -\frac{68}{71}$

b) $2x - 3y + z = 18$
$-5x + 7y - 3z = -2$
$9x - y + 5z = 13$
; Rép. : $x = \frac{287}{6}$, $y = -\frac{25}{12}$
$z = -\frac{1007}{12}$

c) $x + 3y + 4z = 19$
$x - y + z = 2$
$x + y - z = 0$
; Rép. : $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

d) $3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -4$
$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3$
$2x_1 + x_2 + x_4 = 1$
$x_2 + x_3 + x_4 = 6$

Rép. : $x_1 = -1$
$x_2 = 1$
$x_3 = 3$
$x_4 = 2$

FIN.

P.-47- : DÉFI (FACULTATIF)

DÉFI : FACULTATIF (uniquement pour ceux et celles désireux de s'amuser un brin...).

1°) Calculer le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{vmatrix}$$

Rép. : $\Delta = \dfrac{1}{4^4 \cdot 15^3 \cdot 7} = \dfrac{1}{6048000}$

2°) Par la méthode qu'on veut, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} + \dfrac{t}{4} = 1 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} + \dfrac{t}{5} = 2 \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{5} + \dfrac{t}{6} = 3 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} + \dfrac{z}{6} + \dfrac{t}{7} = 4 \end{cases}$$

Rép. : $x = -64$, $y = 900$, $z = -2520$, $t = 1820$

- Solutions disponibles n'importe quand !
  - * Pour 1°) : 1 page, seulement ! Mais Comment......?
  - * Pour 2°) : 2 pages (indépendantes : sans se servir de 1°) !)