Résolution des équations récurrentes

1 Introduction

Considérons la suite géométrique suivante $(1, 2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots)$. Une manière d'écrire cette suite de nombres est d'exprimer le n^{eme} terme en fonction des termes précédents, en définissant bien entendu le premier terme, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &t(n) = 2t(n-1), n \geq 1 \\ &t(0) = 1. \end{aligned}$$

Étant donnée une suite de nombres $(t(1), t(2), \ldots, t(n), \ldots)$, une équation reliant le n^{eme} terme à ses prédéceseurs est appelée **équation récurrente** ou **équation aux différences**. La résolution d'un équation récurrente consiste à trouver une expression du n^{eme} en fonction du paramètre n.

Les équations récurrentes sont divisées en deux catégories: celles qui sont linéaires et celles qui ne le sont pas. Dans ce chapitre, seul un nombre restreint de type d'équations y est discuté.

2 Équation linéaires à coefficients constants

Definition 1 *Une suite de nombres $(t(1), \ldots, t(n), \ldots)$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre k si, et seulement si, il existe des constantes $c_0, \ldots, c_k$ telles que*

$$\begin{aligned} &c_k t(n+k) + c_{k-1} t(n+k-1) + \ldots + c_0 t(n) = g(n) \\ &t(n_0) = d_0, \ldots, t(n_0+k-1) = d_{k-1} \end{aligned} \tag{1}$$

où

- la fonction $g(n)$ est une fonction quelconque en n.
- les paramètres d_i sont des constantes définissant ce qu'on appelle les conditions initiales nécessaires pour démarrer une récursion, à partir de l'indice n_0.
- $t(n+k)$ désigne le terme qui détermine l'ordre de l'équation (1).

Exemple 1 *L'équation suivante est une équation récurrente linéaire d'ordre 3.*

$$\begin{array}{l} 4t(n+3) + 2t(n+1) + t(n) = 4n \log n + n + 1, \ \forall n \geq 3 \\ t(1) = 1; t(2) = 2. \end{array}$$

Remarque: Si $g(n) = 0$ alors on dit que la relation (1) est homogène. Sinon, elle est dite non-homogène.

2.1 Résolution d'équations homogènes

Rappelons qu'une équation linéaire à coefficients constants et homogène est de la forme suivante:

$$\begin{array}{l} c_k t(n+k) + c_{k-1} t(n+k-1) + \ldots + c_0 t(n) = 0 \\ t(n_0) = d_0, \ldots, t(n_0+k-1) = d_{k-1}. \end{array} \tag{2}$$

Definition 2 *L'équation caractéristique de la relation (2) correspond à l'équation polynomiale suivante:*

$$c_k r^k + c_{k-1} r^{k-1} + \ldots + c_1 r + c_0 = 0. \tag{3}$$

Par exemple, l'équation caratéristique de l'équation récurrente

$$4t(n+3) + 7t(n+1) - t(n) = 0$$

est comme suit:

$$4r^3 + 7r - 1 = 0$$

Theorem 1 *La solution générale de l'équation (2) est de la forme suivante*

$$t(n) = \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ r_i^n \sum_{j=0}^{m_i - 1} a_{ij} n^j \right\} \tag{4}$$

où

- *le paramètre $\ell \leq k$ désigne le nombre de racines distinctes de l'équation caractéristique (3).*
- *le paramètre r_i désigne une racine de l'équation caractéristique (3).*
- *le paramètre m_i désigne la multiplicité de la racine r_i.*
- *les coefficients a_{ij} sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions initiales. Notons que la notation a_{ij} utilisée est juste pour les besoins de la formule. En d'autres termes, quand on passe aux calculs proprement dit, on pourrait utiliser des constantes à un seul indice, comme illustré dans l'exemple qui suit.*

Par exemple, si les racines de l'équation caractéristique d'une équation récurrente $t(n)$ possède 3 racines distinctes r_1 (racine triple), r_2 (racine double) et r_3 (racine simple), alors la solution générale est donnée par l'expression suivante:

$$t(n) = r_1^n(a_1 + a_2n + a_3n^2) + r_2^n(a_4 + a_5n) + a_6r_3^n$$

Voyons l'application de ce théorème sur les exemples suivants.

Exemple 2 *Soit à résoudre la relation suivate:*

$$\begin{aligned} &t(n) = t(n-1) + t(n-2); \forall n \geq 2 \\ &t(0) = 0; t(1) = 1. \end{aligned}$$

L'équation caractéristique de cette relation est

$$r^2 - r - 1 = 0$$

Les racines simples de cette équation sont

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Par conséquent, la solution générale

$$t(n) = a_1r_1^n + a_2r_2^n$$

Autrement dit

$$t(n) = a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Les constantes a_1 et a_2 sont déterminées par les conditions initiales commme suit:

$$\begin{aligned} &t(0) = a_1 + a_2 = 0 \\ &t(1) = a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

En résolvant ce système à deux équations et deux inconnues, on obtient

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ et } a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

La solution finale est alors

$$t(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

Exemple 3 *Résoudre l'équation suivante:*

$$\begin{aligned}&t(n+3) - 7t(n+2) + 16t(n+1) - 12t(n); \forall n \geq 3\\&t(0) = 0; t(1) = 1, t(2) = 2.\end{aligned}$$

L'équation caractéristique de cette relation est

$$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$$

Les racines de cette équation sont

$$\begin{aligned}&r_1 = 3;\ \textit{racine simple, et}\\&r_2 = 2;\ \textit{racine double.}\end{aligned}$$

Par conséquent, la solution générale

$$t(n) = a_1 r_1^n + (a_2 + a_3 n) r_2^n$$

Autrement dit

$$t(n) = a_1 3^n + (a_2 + a_3 n) 2^n$$

Les constantes a_1 et a_2 et a_3 sont déterminées par les conditions initiales commme suit:

$$\begin{aligned}&t(0) = a_1 + a_2 = 1\\&t(1) = a_1 2a_2 + 2a_3 = 1\\&t(2) = 9a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 2.\end{aligned}$$

En résolvant ce système à trois équations et trois inconnues, on obtient

$$a_1 = -2;\ a_2 = 2;\ a_3 = 3/2.$$

La solution finale est alors

$$t(n) = -2.3^n + 2^{n+1} + 3n2^{n-1}$$

2.2 Résolution d'équations non-homogènes

Rappelons qu'une équation récurrente linéaire à coefficients constants est telle que la fonction $g(n)$ n'est pas nulle. Autrement dit, elle est de la forme suivante:

$$\begin{aligned}&c_k t(n+k) + c_{k-1} t(n+k-1) + \ldots + c_0 t(n) = g(n)\\&t(n_0) = d_0, \ldots, t(n_0+k-1) = d_{k-1}.\end{aligned} \tag{5}$$

Le principe de résolution, adopté dans cette section, consiste à éliminer d'abord la fonction $g(n)$, et ensuite résoudre l'équation homogène ainsi trouvée à l'aide de la méthode discutée précédemment. Voyons ce procédé sur les exemples suivants.

Exemple 4 *Soit à résoudre l'équation suivante:*

$$t(n+2) - t(n+1) - t(n) = 4. \tag{6}$$

Cette relation est aussi vraie pour $n+1$, c'est-à-dire

$$t(n+3) - t(n+3) - t(n+1) = 4 \tag{7}$$

En soustrayant (6) de (7), on obtient la nouvelle équation suivante

$$t(n+3) - 2(t(n+2) + t(n) = 0$$

Cette nouvelle équation est homogène. En appliquant la méthode de résolution décrite plus haut, on obtient la solution générale suivante.

$$t(n) = a_1 + a_2(1+\sqrt{5})^n + a_3(1-\sqrt{5})^n$$

Comme les conditions initiales ne sont pas données, les coefficients a_1, a_2 et a_3 ne peuvent être déterminés.

Exemple 5 *Soit à résoudre l'équation suivante*

$$t(n) = t(n-1) + n \tag{8}$$
$$t(0) = 1$$

Cette équation est aussi vraie pour $n+1$, c'est-à-dire

$$t(n+1) = t(n) + n + 1 \tag{9}$$

En soustrayant (9) de (8), on obtient

$$t(n+1) - 2t(n) + t(n-1) = 1 \tag{10}$$

Pour $n+1$, l'équation (10) s'écrit comme suit:

$$t(n+2) - 2t(n+1) + t(n) = 1 \tag{11}$$

Encore une fois, en soustrayant (11) de (10) on obtient

$$t(n+2) - 3t(n+1) + 3t(n) - t(n-1) = 0 \tag{12}$$

avec les condtion initiales suivantes

$$t(0) = 0; t(1) = 1; t(2) = 3.$$

Il est utile de remarquer que les deux dernières conditions initiales sont nécessaires pour la résolution de l'équation (8), pour la simple raison que le degré de l'équation (12) est 3. Elles sont déduites de l'équation (8).

En utilisant donc la méthode des équations linéaires homogènes, discutée précédemment, on obtient la solution finale suivante.

$$t(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Une technique permettant d'éliminer plusieurs types de fonctions $g(n)$, d'une manière systématique, est l'utilisation de l'opérateur E.

Definition 3 *Étant donnée une suite de nombres entiers, $f(n)$, l'opérateur d'avancement E est défini comme suit:*

$$f(n) = c \text{ (une constante)} \Longrightarrow E(f(n)) = c$$
$$f(n) \neq \text{ constante} \Longrightarrow E(f(n)) = f(n+1).$$

Exemple 6

$$f(n) = 2 \Longrightarrow E(f(n)) = 2$$
$$f(n) = 2^n \Longrightarrow E(f(n)) = 2^{n+1}$$

D'autres opérateurs peuvent aussi être crées en combinant l'opérateur E à lui-même ou à des constantes. Pour ce faire, on définit pour la constante c l'opérateur de même nom c comme suit:

$$c(f(n)) = c \times f(n)$$

La multiplication et l'addition d'opérateurs sont définies comme suit:

$$(E1 \times E2)f(n) = E1(E2(f(n))$$
$$(E1 + E2)f(n) = E1(f(n)) + E2(f(n))$$

Exemple 7 *Illustrons l'application de ces opérateurs sur les fonctions suivantes:*

$$(E-2)2^n = E(2^n) - 2(2^n) = 2^{n+1} - 2^{n+1} = 0$$
$$E(n+1) = n+2$$

Ainsi définies, il est facile de vérifier:

- L'addition et la multiplication d'opérateurs sont commutatives

$$\begin{aligned}(E1 + E2)f(n) &= (E2 + E1)f(n) \\ (E1 \times E2)f(n) &= (E2 \times E1)f(n)\end{aligned}$$

- L'addition et la multiplication d'opérateurs sont associatives

$$\begin{aligned}((E1 + E2) + E3)f(n) &= (E1 + (E2 + E3))f(n) \\ (E1(E2 \times E3))f(n) &= ((E1 \times E2)E3)f(n)\end{aligned}$$

Utilisation de l'opérateur E

L'intérêt de l'opérateur E réside dans sa capacité de rendre une équation non-homogène en une autre équation équivalente mais homogène, après un certain nombre de transformations. Voyons cela sur les exemples suivants.

Exemple 8 *Soit à résoudre l'équation suivante:*

$$\begin{aligned} & t(n+2) - 4t(n+1) + 4t(n) = n^2; \forall n \geq 2, \\ & t(0) = 0; t(1) = 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Appliquons l'opérateur E au terme n^2 comme suit:

$$\begin{aligned} & E(n^2) = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \\ & (E-1)(n^2) = E(n^2) - n^2 = 2n + 1 \\ & (E-1)(2n+1) = E(2n+1) - 2n - 1 = 2 \\ & (E-1)(2) = E(2) - 2 = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, en appliquant l'expression $(E-1)^3$ aux deux membres de l'équation (13), on obtient:

$$(E-1)^3 \left(t(n+2) - 4t(n+1) + t(n) = n^2\right) \tag{14}$$

Développant cette relation, on obtient:

$$t(n+5) - 7t(n+4) + 16t(n+3) - 16t(n+2) + 7t(n+1) - 4t(n) = 0 \tag{15}$$

L'équation caractéristique de cette équation est:

$$r^5 - 7r^4 + 16r^3 - 16r^2 + 7r - 4 = 0$$

qui peut encore s'écrire comme suit:

$$(r-1)^3(r-2)^2 = 0$$

La solution finale est donc comme suit:

$$t(n) = (a_0 + a_1 n + a_2 n^2)1^n + (a_3 + a_4 n)2^n$$

Les constantes a_0, a_1, a_2, a_3 et a_4 sont déterminées par les conditions initiales suivantes:

$$\begin{aligned} & t(0) = a_0 + a_1 = 0 \\ & t(1) = a_0 + a_1 + a_2 + 2a_3 + 2a_4 = 1 \end{aligned}$$

On s'apperçoit que trois valeurs initiales manquent pour déterminer les valeur des quatre constantes. Pour pallier à ce problème, on calcule $t(2)$ et $t(3)$ à partir de l'équation (13), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} t(2) &= 4t(1) = 4 \\ t(3) &= 9 \\ t(4) &= 37. \end{aligned}$$

Par conséquent, les équation manquantes sont

$$\begin{aligned} t(2) &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 4a_3 + 8a_4 = 4 \\ t(3) &= a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 8a_3 + 24a_4 = 9 \\ t(4) &= a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 16a_3 + 64a_4 = 37. \end{aligned}$$

En résolvant ce système d'équations, on obtient les valeurs suivantes:

$$a_0 = 31; a_1 = 31/2; a_2 = 5/2; a_3 = -31; a_4 = 11/2$$

Par conséquent, la solution finale est

$$t(n) = 11n2^{n-1} - 312n - 1 + 5/2n^2 - 15/2n + 31$$

Exemple 9 *Soit à résoudre l'équation suivante:*

$$\begin{aligned} t(n) &= t(n-1) + 2^n \\ t(0) &= 1. \end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur E, on obtient:

$$(E-2)2^n = 2^{n+1} - 2.2^n = 0$$

Par conséquent

$$(E-2)(t(n) - t(n-1)) = 0$$

En développant cette équation, on trouve que les racines de son équation caractéristique sont:

$$r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 2$$

Par conséquent, la solution générale est comme suit:

$$t(n) = a_0 + a_1 2^n$$

En procédant de la même manière que précédemment, on obtient:

$$a_0 = -1 \text{ et } a_1 = 2$$

La solution finale est comme suit:

$$t(n) = 2^{n+1} - 1$$

Remarque: *Il existe une manière élégante de procéder pour résoudre cette équation (et bien d'autres encore!). En effet, écrivons cette équation pour les différentes valeurs de n comme suit:*

$$\begin{aligned}
&t(n) = t(n-1) + 2^n \\
&t(n-1) = t(n-2) + 2^{n-1} \\
&t(n-2) = t(n-3) + 2^{n-2} \\
&\cdots\cdots \\
&t(2) = t(1) + 2^2 \\
&t(1) = t(0) + 2
\end{aligned}$$

En sommant les termes de gauche entre-eux et les termes de droite entre-eux, on arrive à:

$$t(n) = t(0) + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Exemple 10 *Résoudre l'équation suivante*

$$\begin{aligned}
&t(n) = t(n-1) + n2^n \\
&t(0) = 0
\end{aligned}$$

En appliquant l'opérateur E, on obtient

$$\begin{aligned}
(E-2)n2^n &= (n+1)2^{n+1} - n2^{n+1} - n2^{n+1} = 2^{n+1} \\
(E-2)2^{n+1} &= 2^{n+2} - 2.2^{n+1} = 0
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(E-2)^2(t(n) - t(n-1)) = 0$$

L'équation caractéristique de cette relation est:

$$(r-2)^2(r-1) = 0$$

La solution générale est:

$$t(n) = (a_0 + a_1 n)2^n + a_2$$

En sachant que $t(1) = 2$ et $t(2) = 10$, les valeurs de a_0 et a_1 sont

$$a_0 = -2; a_1 = 2, a_2 = 2$$

La solution finale est donc comme suit

$$t(n) = (n-1)2^{n+1} + 2$$

Le tableau ci-dessous résume l'expression à employer pour éliminer quelques fonctions $g(n)$ dans les équations non-homogènes. Dans le tableau qui suit, $P_k(n)$ et α représentent un polynôme en n de degré k et une valeur entière, respectivement.

Fonction $g(n)$	Éliminateur correspondant
$g(n) = \text{constante}$	$(E-1)$
$g(n) = P_k(n)$	$(E-1)^{k+1}$
$g(n) = \alpha^n$	$(E-\alpha)$
$g(n) = \alpha^n P_k(n)$	$(E-\alpha)^{k+1}$

Remarques importantes: Les deux observations suivantes peuvent être utilisées pour simplifier la résolution des équations récurrentes

- Si $E1$ est l'annihilateur de $g(n)$ alors les racines de l'équation caractéristique de

$$E1(c_k t(n+k) + \cdots + c_0 t(n)) = 0 \tag{16}$$

sont les valeurs qui annulent $E1$ et $c_k r^k + c_{k-1} r^{k-1} + \cdots + c_0$. Cela nous permet de ne pas développer l'équation (16), comme nous l'avons fait précédemment, et nous évite ainsi des calculs laborieux.

Exemple 11 *Reprenons l'équation*

$$t(n+2) - 4t(n+1) + 4t(n) = n$$

On a obtenu l'équation équivalente suivante

$$(E-1)^3(t(n+2) - 4t(n+1) + 4t(n)) = 0.$$

Au lieu de développer cette équation, comme on serait tenter de le faire, pour trouver son équation caractéristique, on dira simplement que ces racines sont:

$r_1 = 1$ *racine triple de* $(E-1)^3 = 0$
$r_2 = 2$ *racine double de l'équation caractéristique :*
$r^2 - 4r + 4 = 0.$

- Si $E1$ est l'annihilateur de $f(n)$ et $E2$ celui de $g(n)$ alors $(E1 \times E2)$ est l'annihilateur de la fonction $(f(n) + g(n))$.

Exemple 12 *Soit* $k(n) = n3^n + n^2$ *Du tableau ci-dessus, on peut déduire*

$$(E-3)^2(n3^n) = 0$$
$$(E-1)(n^2) = 0.$$

Par conséquent, l'annihilateur de $k(n) = n3^n + n^2$ *est* $(E-1)^2(E-1)^3$.

3 Résolution d'équations non-linéaires

À l'exception d'équations linéaires homogènes et à coefficients constants, il n'existe pas de méthodes systématiques pour résoudre les autres types d'équations récurrentes. L'idéal est d'arriver, à l'aide d'artifices, à transformer l'équation à résoudre en une autre équivalente dont nous connaissons déjà la résolution.

Dans cette section, nous allons passer en revue quelques approches de résolution de certains type d'équations récurrentes non linéaires, en particulier celles qui reviennent souvent dans l'analyse des algorithmes.

Nous allons commencer par une classe d'équations importantes, en l'occurence les équations diviser et règner. La forme générale de cette clase est comme suit:

$$\begin{aligned} t(n) &= at(n/k) + g(n) \qquad (17) \\ t(n_0) &= c. \end{aligned}$$

où k est une constante et n une puissance de k ($n = k^m$).

Il convient de signaler que les résultats approximés sont prisés dans l'anayse des algorithmes, du moment que la notation O y est très utilisée.

Theorem 2 (Master Theorem) *Pour les fonction $g(n) = \Theta(n^d)$, la solution de l'équation (17) est comme suit*

$$t(n) = \begin{cases} \Theta(n^d) & if \quad a < b^d \\ \Theta(n^d \log n) & if \quad a = n^d \\ \Theta(n^{\log_b a}) & if \quad a > n^d \end{cases}$$

Ce résultat est aussi valable pour les notations O et Ω.

Cela étant dit, on peut néanmoins, sans avoir recours à ce thérorème, procéder d'une autre manière pour résoudre un grand nombre d'équations de type diviser-et-règner.

3.1 Méthode par transformation

L'idée de cette approche est de revenir à une équation linéaire en procédant de la manière suivante:

Posons

$$Y(m) = t(n) = t(k^m)$$

Dans ce cas, on aura

$$t(n/k) = t(k^{m-1}) = Y(m-1)$$

et

$$g(n) = g(k^m) = f(m)$$

Par conséquent, l'équation de départ est équivalente à l'équation linéaire suivante:

$$Y(m) = Y(m-1) + f(m)$$

Si nous pouvions trouver un annihilateur pour $f(m)$, alors cette équation est résoluble par la méthode discutée à la section précédente.

Exemple 13 *Soit à résoudre l'équation suivante:*

$$t(n) = 4t(n/2) + n$$
$$t(1) = 1.$$

Après les transformations comme ci-dessus, on arrive à l'équation ci-dessous:

$$Y(m) = 4Y(m-1) + 2^m$$

En résolvant cette équation linéaire (utiliser le théorème de la section précédente) par rapport à m*, on trouve*

$$Y(m) = a2^m + b4^m$$

Comme $n = 2^m$*, alors on obtient*

$$t(n) = an + bn^2$$

Les constantes a *et* b *sont déterminées par les conditions initiales. On arrive aux valeurs suivantes:*

$$a = -1; b = 2$$

La solution finale est par conséquent comme suit:

$$t(n) = 2n^2 - n$$

3.2 Méthode par substitution

La méthode décrite précédemment n'est valable que dans le cas où on connait un annihilateur pour la fonction $f(n)$. Ceci n'est malheureusement pas toujours le cas. Dans ces conditions, une autre méthode, qui consiste à développer directement la récurrence, pourrait aboutir à des résultats.

Exemple 14 *Soit à résoudre la relation suivante:*

$$t(n) = t(n/2) + \log\log n$$
$$t(1) = 1.$$

En développant cette relation, on obtient

$$
\begin{aligned}
&t(n) = t(n/2) + \log\log n \\
&t(n) = t(n/2^2) + \log\log n/2 + \log\log n \\
&t(n) = t(n/2^3) + \log\log n/2^2 + \log\log n/2 + \log\log n \\
&\cdots\cdots \\
&t(n) = t(n/2^k) + \sum_{i=1}^{k-1} \log\log n/2^i
\end{aligned}
$$

Ce développement sera arrêté dès que $n/2^k = 1$, car la récurrence déamarre à partir de l'indice 1. Autrement dit quand $n = 2^k$. On obtient ainsi:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1} \log\log n/2^i &= \sum_{i=1}^{k-1} \log(k-i) \\
&= k\log k - 2(k-1) + 2
\end{aligned}
$$

En remplaçant k par $\log n$, on obtient

$$t(n) = 3 + \log n \log\log n - 2(\log n - 1)$$

3.3 Méthode par changement de variables

Cette méthode consiste à opérer un cgangement de variables judicieux de telle manière à simplifier l'équation en question.

Exemple 15 *Soit à résoudre l'équation suivante:*

$$
\begin{aligned}
&t(n) = n/2t^2(n/2) \\
&t(1) = 1.
\end{aligned}
$$

En supposant que $n = 2^k$, on obtient l'équation suivante:

$$t(2^k) = 2^{k-1}t^2(2^{k-1})$$

En poant $Y(k) = t(2^k)$, on aura

$$Y(k) = 2^{k-1}Y^2(k-1)$$

La condition initiale est $Y(0) = 1$.

Faisons encore un changement de variables

$$L(k) = \log Y(k)$$

Ceci nous conduit à l'équation suivante

$$L(k) = 2L(k-1) + (k-1)$$
$$L(0) = 0.$$

La solution de cette équaion est

$$L(k) = 2^k - k - 1$$

On déduit que

$$Y(k) = \frac{2^{2^k-1}}{2^k}$$

En remplaçant 2^k *par* n*, on obtient la solution finale suivante*

$$t(n) = \frac{2^{n-1}}{n}$$

3.4 Résolution par induction

Cette méthode consite à deviner la soltuion, et puis de la démontrer à l'aide du principe de récurrence.

Deviner une solution n'est généralement pas une chose facile, mais dans certains cas, la solution est connue pour certaines forme de la variable n. On devrait s'attendre (out tout au moins essayer cette solution pour commencer) dans le cas général à la même solution, du moins en notation asymptotique. Dans d'autres situations, il est conseillé de développer la realtion de récurrence pour les première valeurs, pour voir si une relation ne se déage pas entre les termes ainsi générés.

Exemple 16 *Soit à résoudre l'equation suivante:*

$$t(n) = t(\lfloor n/2 \rfloor) + b$$
$$t(1) = 1.$$

Il est facile de montrer que pour $n = 2^k$*, la solution de cette éqaution est:*

$$t(n) = 1 + b \log n$$

Comme la solution doit être entière, cela nous suugère d'essayer la solution suivante

$$t(n) = 1 + b\lfloor \log n \rfloor$$

Montrons maitenant par induction que cette solution est vraiment la solution de notre équation. En effet pour $n = 1$ *et* $n = 2$*, cette relation est vraie. Maintenant, supposons qu'elle est vraie jusqu'à* $(k-1)$*. Voyons si elle l'est aussi pour* k*. Par définition, nous avons*

$$t(k) = b + t(\lfloor k/2 \rfloor)$$

Par hypothèse d'induction, nous pouvons déduire

$$\begin{aligned} t(k) &= b + (1 + b\lfloor \log\lfloor k/2 \rfloor \rfloor \\ &= 1 + b(1 + \lfloor \log\lfloor k/2 \rfloor \rfloor) \end{aligned}$$

En sachant

$$\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor = \begin{cases} k/2 & \textit{si } k \textit{ est pair} \\ (k-1)/2 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On obtient alors

$$t(k) = \begin{cases} 1 + b\log k & \textit{si } k \textit{ est pair} \\ 1 + b\log(k-1) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Or, on sait que si k est impair, $\lfloor \log k \rfloor = \lfloor \log(k-1) \rfloor$. Par conséquent, la solution est

$$t(n) = 1 + b\lfloor \log n \rfloor$$

3.5 Méthode des équations secondaires

Nous avons vu dans la méthode par transformation que la résolution de l'équation diviser et régner peut être établie en la transformant en une équation linéaire équivalente. Le type suivant d'équations peut aussi être résolu en utiliant la même approche.

$$\begin{aligned} &t(n) = a(n)t(f(n)) + g(n) \\ &t(n_0) = b. \end{aligned}$$

Exemple 17 *Résoudre l'équation suivante*

$$\begin{aligned} &t(n) = 3t(n/2 + 1) + n \qquad (18) \\ &t(3) = 1. \end{aligned}$$

On voudrait chosir un indice k de telle manière que l'équation ci-dessus puisse s'écrire comme suit:

$$Y(k) = 3Y(k-1) + \textit{ une certaine fonction en } k \qquad (19)$$

Soit $n(k)$ la valeur de n correspondant à cet indice k. Pour que l'équation (19) soit équivalente à l'équation (18), il faudrait que la relation suivante soit vérifiée.

$$\begin{aligned} &n(k-1) = n(k)/2 + 1 \qquad (20) \\ &n(0) = 3. \end{aligned}$$

Cette équation, équation secondaire associée à l'équation (18), peut aussi s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} &n(k) = 2n(k-1) - 2 \\ &n(0) = 3. \end{aligned}$$

En résolvant cette équation, on obtient

$$n(k) = 2^k + 2$$

L'équation (18) peut donc s'écrire comme suit

$$\begin{aligned}&t(2^k + 2) = 3t(2^{k-1} + 2) + 2^k + 2\\&t(2^0 + 2) = 1.\end{aligned}$$

En posant $Y(k) = t(n)$, *on obtient*

$$\begin{aligned}&Y(k) = 3Y(k-1) + 2^k + 2)\\&t(3) = 1.\end{aligned}$$

La solution de cette équation est

$$Y(k) = 4 \times 3^k - 2^{k+1} - 1$$

Comme $n = 2^k + 2$, *on obtient la solution finale suivante*

$$t(n) = 4(n-2)^{\log 3} - 2n + 3.$$

3.6 Série génératrices

Une autre approche, pour résoudre une grande variété d'équations récurrentes, est l'utilisation des séries génératrices.

Definition 4 *La série génératrice, associée à la suite de nombres définie par la relation récurrente suivante*

$$t(n) = f(t(n-1), t(n-2), \ldots, t(n-k)) \tag{21}$$

est la somme suivante des puissances:

$$G(x) = \sum_{n \geq n_0} t(n)x^n$$

où n *représente l'indice de la première valeur initiale de l'équation (21).*

La méthode de résolution peut être résumée comme suit:

1. Créer la série génératrice $G(x)$ associée à l'équation de récurrence. La somme doit commencer à partir du premier indice n qui est en dehors des valeurs qui définissent les conditions initiales de l'équation en question.

2. Convertir cette équation de récurrence en une autre dont l'incconue est maintenant la série génétratice $G(x)$.
3. Résoudre l'équation trouvée à l'étape 2.
4. Identifier le terme $t(n)$ dans la solution trouvée à l'étape 3.

Pour plus d'éclaircissements, voyons cette méthode sur quelques exemples.

Exemple 18 *Soit à résoudre l'équation suivante*

$$\begin{aligned} t(n) &= 2t(n-1) + 1 \\ t(0) &= 1 \end{aligned}$$

La série génératrice associée à cette relation est

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} t(n)x^n$$

Revenons à notre équation de départ, et réécrivons la comme suit

$$\sum_{n\geq 1} t(n)x^n = \sum_{n\geq 1} (2t(n-1)+1)x^n$$

Or

$$\sum_{n\geq 1} t(n)x^n = G(x) - 1 \textit{ moins le premier terme}$$

et

$$\sum_{n\geq 1} (2t(n)-1)x^n = 2x\sum_{n\geq 1} t(n-1)x^{n-1} - \sum_{n\geq 1} x^n$$

Remarquons d'abord

$$\sum_{n\geq 1} t(n-1)x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} t(n)x^n = G(x)$$

$$\sum_{n\geq 1} x^n = \sum_{n\geq 0} x^n - 1$$

Par ailleurs, on sait que

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x} \textit{ pour } |x| < 1$$

Après de simple manipulations algébriques, on obtient facilement

$$G(x) = 2xG(x) + \frac{1}{1-x}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-2x)} \\ &= \frac{2}{(1-2x)} - \frac{1}{(1-x)} \end{aligned}$$

On sait que, pour $|x| < 1/2$, les deux relations suivantes sont vérifiées:

$$\frac{1}{(1-x)} = \sum_{n \geq 0} x^n$$
$$\frac{1}{(1-2x)} = \sum_{n \geq 0} (2x)^n$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} G(x) &= 2\sum_{n \geq 0}(2x)^n - \sum_{n \geq 0} x^n \\ &= \sum_{n \geq 0}(2^{n+1}-1)x^n \end{aligned}$$

En identifiant maintenant les n^{eme} termes de deux expressions de $G(x)$, on obtient

$$t(n) = 2^{n+1} - 1$$

Exemple 19 *Résoudre l'quation suivante:*

$$t(n,m) = t(n,m-1) + t(n-1,m-1)$$
$$t(0,m) = 1; t(n,0) = 1.$$

Soit la série génératrice $G_m(x)$, associée à l;a suite de nombre $t(n,m)$, définie comme suit:

$$G_m(x) = \sum_{n \geq 0} t(n,m)x^n$$

L'équation de départ peut aussi être écrite de la manière suivante:

$$\sum_{n \geq 1} t(n,m)x^n = \sum_{n \geq 1} t(n,m-1)x^n + \sum_{n \geq 1} t(n-1,m-1)x^n$$

Or

- $\sum_{n \geq 1} t(n,m)x^n = G_m(x) - t(0,m)$

- $\sum_{n\geq 1} t(n,m-1)x^n = G_{m-1}(x) - t(0,m)$
- $\sum_{n\geq 1} t(n-1,m-1)x^n = xG_{m-1}(x)$

De ces relations, on déduit l'équation suivante

$$G_m(x) = (1+x)G_{m-1}(x)$$

En développant cette éqaution on arrive au résultat suivant

$$G_m(x) = (1+x)^m G_0(x)$$

Comme $G_0(x) = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ *pour* $|x| < 1$*, on obtient alors la solution suivante:*

$$G_m(x) = \frac{(1+x)^m}{1-x}$$

Comme $(1+x)^m = \sum_{n\geq 0} C_n^m x^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$*, leur produit est égal à l'expression suivante:*

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^n$$

En identifiant les n^{eme} *termes des deux expressions de* $G_m(x)$*, on obtient la solution suivante:*

$$t(n,m) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$$

Exemple 20 *Soit à résoudre l'équation suivante:*

$$\begin{aligned} & nt(n) - t(n-1) = 0 \\ & t(0) = 1. \end{aligned}$$

En multipliant par x^n *et sommant sur* n *cette équation, on obtient:*

$$\sum_{n\geq 1} nt(n)x^n - \sum_{n\geq 1} t(n-1)x^n = 0$$

Si on pose $G(x) = \sum_{n\geq 0} t(n)x^n$*, alors ob obtient les relations suivantes:*

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} t(n-1)x^n &= x\sum_{n\geq 1} nt(n)x^n \\ &= xG(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\left(\sum_{n\geq 0} nt(n)x^n - t(0)\right)' &= \sum_{n\geq 1} nt(n)x^n \\ &= xG'(x) \end{aligned}$$

Après remplacement, on obtient l'équation différentielle suivante:

$$G(x) = xG'(x)$$

Par conséquent

$$G(x) = e^x$$

Comme $e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$*, en identifiant les* n^{eme} *termes de deux expressions de* $G(x)$*, on obtient facilement*

$$t(n) = \frac{1}{n!}$$

Exemple 21 *Résoudre l'équaion suivante:*

$$\begin{aligned} &t(n) = \sum_{i\geq 1}^{n} t(i)t(n-i); \\ &t(1) = 1. \end{aligned}$$

Posons $G(x) = \sum_{n\geq 1} t(n)x^n$*. Calculons le produit* $G(x) \times G(x)$*.*

$$\begin{aligned} G^2(x) &= t(1)t(1)x^2 + (t(1)t(2) + t(2)t(3))x^3 + \cdots \\ &\quad +(t(1)t(n-1) + t(2)t(n-2) + \cdots t(n-1)t(1))x^n + \cdots \end{aligned}$$

On remarque que le coefficient associé à x^i *n'est rien d'autre que* $t(i)$*. Par conséquent, on peut écrire ce qui suit:*

$$\begin{aligned} G^2(x) &= \sum_{i\geq 2} t(i)x^i \\ &= \sum_{i\geq 1} t(i)x^i - t(1)x \\ &= G(x) - x \end{aligned}$$

Les racines de cette équation sont

$$G(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} \text{ et } G(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}$$

Comme $G(1) = 1$, seule la première racine est correcte. Le coefficient du n^{eme} terme de $G(x)$, obtenu en faisant le développement de McLaurin, est $\frac{2}{n}C_{2n-2}^{n-1}$. En identifiant le n^{eme} terme de deux expressions de $G(x)$, on arrive facilement à la solution suivante:

$$t(n) = \frac{2}{n}C_{2n-2}^{n-1}$$

Soient $A(x) = \sum_{i \geq n_0} a_i x^i$ et $B(x) = \sum_{i \geq n_0} b_i x^i$. La table 2.1 indique le n^{eme} terme de quelques fonctions quand elles sont développées en série génératrices. La table 2.2 résume quelques opérations sur des séries génératices.

Remarque importante: Lors du développement d'une fonction quelconque en séries généatrice, il n'y pas lieu de s'inquiéter sur la convergence de ces séries: aprés avoir obtenu une solution à l'aide de cette méthode, il suffit alors de vérifier son exactitude à l'aide, par exemple, de la méthode du principe d'induction.

$A(x)$	n^{eme} terme	domaine de convergence
$\frac{1}{1-cx}$	c^n	$\lvert x\rvert < \frac{1}{c}$
$\frac{1}{(1-cx)^2}$	nc^n	$\lvert x\rvert < \frac{1}{c}$
$\frac{1}{(1-cx)^k}$	C_{n+k-1}^n	$\lvert x\rvert < 1$
$(1+x)^k$	C_k^n si $n \leq k$ 0 sinon	$\lvert x\rvert < 1$
e^x	$\frac{1}{n!}$	-
$\frac{1}{1-e^{ax}}$	e^{an}	$\lvert x\rvert < \frac{1}{e^a}$
$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$	C_n^m	$\lvert x\rvert < 1$
$\frac{x(x+a)}{(1-x)^3}$	$\frac{n^2}{a^{n+1}}$	$\lvert x\rvert < a$
$\log \frac{1}{1-x}$	$\frac{1}{n}$ si $n \geq 1$ 0 sinon	$\lvert x\rvert < 1$
$\frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x}$	$\sum k = 1^n \frac{1}{k}$	$\lvert x\rvert < 1$

Figure 2.1

Série génératrice	Le n^{eme} terme
$\lambda A(x)$	λa_n
$A(x) + B(x)$	$a_n + b_n$
$A(x) \times B(x)$	$\sum_{j=n_0}^{n} a_j b_{n-j}$
$x^k A(x)$	a_{n-k} si $n > k$ 0 sinon
$A(x^k)$	$a_{n/k}$ si $n \mod k = 0$ 0 sinon
$A(\lambda x)$	$\lambda^n a_n$
$\frac{A(x)}{1-x}$	$\sum_{j=0}^{n} a_n$
$xA'(x)$	na_n

Figure 2.2

3.7 Séries génératrice de probabilité

L'introduction des séries génératrices de probabilité peut s'avérer fructueuse dans l'analyse des algorithmes, en particulier dans le calcul de la complexité moyenne. Cette approche fournit en effet non seulement la valeur de la complexité moyenne, mais aussi celle de l'écart type.

Soit une variable aléatoire X, correspondant à la réalisation d'un événement quelconque, à valeur dans l'ensemble des entiers naturels. Soit p_i la probabilité que la valeur de la variable X soit égale à i. La série génératrice associée à X est

$$G(z) = \sum_{i \geq 0} p_i z^i$$

Évaluons maintenant $G(z)$ au point $z = 1$.

$$G(1) = \sum_{i \geq 0} p_i = 1$$

Si on dérive une fois $G(z)$, on obtient

$$G'(z) = \sum_{i \geq 0} i p_i z^{i-1}$$

Pour $z = 1$, on obtient

$$G'(z) = \sum_{i \geq 0} i p_i$$

Cette relation n'est rien d'autre que l'espérance mathématique (moyenne) $E(X)$ de la variable X.

De la même manière, en dérivant deux fois $G(z)$, on obtient

$$G''(z) = \sum_{i\geq 0} i^2 p_i z^{i-2} - \sum_{i\geq 0} i p_i z^{i-2}$$

Comme la variance $V(X)$ est

$$V(X) = \sum_{i\geq 0} i^2 p_i - \left(\sum_{i\geq 0} i p_i\right)^2$$

On déduit alors la relation suivante:

$$V(X) = G''(1) - G'(1) - G'(1)^2$$

Ainsi l'écart type peut être déduit facilement de cette expression.

4 Applications des équations de récurrence

Il est clair que l'étude de équations récurrentes, en ce qui nous concerne, va être principalement restreint à l'analyse ds algorithmes récursifs et la détermination des complexités moyennes. Néanmois, il est utile de faire un survol des différentes applications des équations dans d'autres domaines. De plus, le lecteur aura à voir la construction ou l'établissemnet de ces équations à travers les exemples qui suivent.

Exemple 22 *Soit la portion suivante d'une suite numérique*

$$1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, \ldots$$

À partir de ces nombres, on désire savoir s'il existe une quelconque relation entre ces derniers, et éventuellement déterminer le n^{eme} terme a_n en fonction de n.

Une manière de répondre à cette question est de voir comment varient les différences suivantes

$$\begin{array}{ll} a_1 - a_0 = 4; & a_2 - a_1 = 8 \\ a_3 - a_2 = 12; & a_4 - a_3 = 16 \\ a_5 - a_4 = 20; & a_6 - a_5 = 24 \\ a_7 - a_6 = 28; & a_8 - a_7 = 32. \end{array}$$

Ces calculs suggèrent la realtion suivante

$$a_n - a_{n-1} = 4n$$

Cette relation n'est rien d'autre qu'une équation linéaire à coefficients constants. Autrement dit, le n^{eme} terme peut être calculé facilement.

Exemple 23 *Les équations récurrentes peuvent être utiles dans le calcul de certaines sommes. Par exemple, évaluons l'expression suivante en fonction de n.*

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

Si nous posons $S(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$, alors il est facile d'établir la relation suivante:

$$S(n) = S(n-1) + n^2$$

Cette relation n'est rien d'autre qu'une équation linéaire à coefficients constants. Encore une fois, le n^{eme} terme $S(n)$ peut être calculé facilement.

Exemple 24 *Soit l'algorithme suivant calculant le PGCD de eux nombres n et m.*

```
function PGCD(int n,m){
  begin
     if m = 0
        return(n)
     else return( PGCD (m, n mod m))
}
```

Si $t(n, m)$ représente la complexité de la fonction PGCD(n,m), alors la complexité de l'exécution de PGCD(m, n mod m) correspond à t(n, n mod n). Dans le cas où $m = 0$, alors la fonction PGCD effectue deux opérations (1 test et 1 affectation). Dans le cas contraire, en plus de la compelxité de PGCD(n, n mod m), la fonction PGCD effectue aussi quatre opérations (1 test, 1 affecattion, 1 appel à elle-même et 1 opération modulo). En conséquence, on obtient la récurrence suivante:

$$t(n, m) = \begin{cases} 2 & \text{si } m = 0 \\ t(m, n \mod m) + 4 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette équation n'est rien d'autre qu'une relation récurrente non-linéaire.

Exemple 25 *Soit l'algorithme suivant calculant le maximum d'un tableau de n nombres.*

```
function maximum(tab A, int n){
     int lemax = A[0];
     for (int i = 1; i< n; i++)
         if lemax < A[i]
             lemax = A[i];
     return(lemax);
}
```

On désire déterminer le nombre moyen que l'instruction, "lemax = A[i]", est exécutée. Pour ce faire, nous alons supposer que les $n!$ différentes permutations des n léléments sont toutes équiprobables. Rappelons que ce nombre moyen est donné par la formule suivante:

$$t_{moy} = \sum_{k=1}^{n} kp_k$$

où p_k représente la probabilité que k affectations soient exécutées.

Comme il existe plusieurs possibilités engendrant l'exécutaions de k affectations, il est plutôt difficile de calculer à priori cette probabilité d'une manière directe. Pour contourner cette difficulté, nous allons l'exprimer sous forme d'une équation récurrente. Même si nous n'avons pas la forme explicite, nous pouvons toujours determiner le nombre moyen en utilisant les séries génératrices.

Soit donc $p(n,k)$ la probabilité que cete affectation soit exécutée k fois en présence de n éléments. Distinguons les deux cas suivants:

1. **Le maximum est en dernière position dans le tableau A:** Dans ce cas, le nombre de fois que cette affectation soit exécutée est égal à une unité de plus du nombre de fois que cette affectation soit exécutée en présence de $n-1$ éléments. Pour calculer $p(n,k)$, il suffit de connaître la probabilité que cette situation se présente qui est égale à $\frac{1}{n}$ et la probabilité que $k-1$ affectations soient exécutées auparavent, c'est-à-dire $p(n-1,k-1)$. On obtient alors la relation suivante, en terme de probabilité:

$$p(n,k) = \frac{1}{n}p(n-1,k-1)$$

2. **Le maximum n'est pas en dernière position dans le tableau A:** Le nombre de fois, que cette affectation est exécutée, est égal à une unité de plus du nombre de fois que cette affectation est exécutée parmi les $n-1$ éléments. Par complémentarité au cas précédent, la probabilité que cette situation se présente est égale à $(1-\frac{1}{n})$ et la probabilité que $k-1$ affectations soient exécutées auparavent, c'est-à-dire $p(n-1,k-1)$. On obtient alors la relation suivante en termes de probabilité:

$$p(n,k) = \frac{n-1}{n}p(n-1,k)$$

Ces deux événements étant exclusifs, $p(n,k)$ peut alors s'écrire comme étant la somme des deux expressions obtenues ci-dessus, c'est-à-dire

$$p(n,k) = \frac{1}{n}p(n-1,k-1) + \frac{n-1}{n}p(n-1,k)$$

Cette relation de récurrence ne peut être définie sans les conditions initiales qui sont les suivantes:

$$p(1,1) = 1; p(1,0) = 0$$

La série génératrice associée à $p(n, k)$ est

$$G_n(x) = \sum_{k \geq 0} p(n, k) x^k$$

En mutipliant les eux membres de cette équation par x^k et en sommant sur k, on obtient

$$G_n(x) = \frac{x + n - 1}{n} G_{n-1}(x)$$

Or on sait que

$$t_{moy}(n) = G'(1)$$

En dérivant $G_n(x)$, par rapport x, on obtient

$$G' = \frac{1}{n} G_{n-1}(x) + \frac{x + n - 1}{n} G'_{n-1}(x)$$

On obtient donc

$$G'_n(x) = \frac{1}{n} + G'_{n-1}(x)$$

Comme $G'_n(1) = 0$, en résolvant cette équation, on obtient la solution suivante

$$\begin{aligned} t_{moy}(n) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &= H_n - 1 \\ &= \Theta(\log n). \end{aligned}$$

Pour calculer l'écart type de cette moyenne, on procède comme suit:

$$V(n) = G_n(''(1) - G'_n(1) - G'_n(1)^2$$

Calculons d'abord $G''_n(1)$. Pour ce faire, dérivons une fois l'expressio de dessus de G'. On obtient

$$G_n(''(x) = \frac{2}{n} G'_{n-1}(x) + G''_{n-1}(x)$$

On aura donc:

$$\begin{aligned} V(n) &= \frac{2}{n} G'_{n-1}(1) + G''_{n-1}(1) + \frac{1}{n} + G'_{n-1}(1) - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} G'_{n-1}(1) + G'_{n-1}(1)^2 \right) \\ &= G''_{n-1}(1) + G'_{n-1}(1) - G'_{n-1}(1)^2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\ &= V(n-1) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Résolvons cette équation comme suit:

$$\begin{aligned}
V(n) - V(n-1) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\
V(n-1) - V(n-2) &= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2} \\
V(n-2) - V(n-3) &= \frac{1}{n-2} - \frac{1}{(n-2)^2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
V(2) - V(1) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}
\end{aligned}$$

Ntons que $V(1) = 1$. En addtionnant membres à membres les différentes équations ci-dessus, on arrive à la solution suivante:

$$\begin{aligned}
V(n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\
&< H_n \\
&= O(\log n)
\end{aligned}$$

L'écart type est donc en $\Theta(\sqrt{\log n})$. Cela signifie que les différents nombres d'affectations de l'instruction "lemax = A[i]" sont assez bien concentrés autour de leur moyenne.

Exemple 26 *Reprenons l'algorithme de la recherche dichotomique d'un élément dans un tableau trié. Pour rappel, cet algorithme a été discuté dans le chapitre précédent.*

Soit donc la version suivante récursive de cet algorithme:

```
int function dichotomique(int u,s){
   int mid = (s-u+1) div 2;
    if A[mid] = C {
       return(mid)
    else if A[mid] ¡ C
           return(u,mid+1)
         else return(mid-1,s)
}
```

Pour simplifier note analyse, supposons que l'élément recherché C existe dans le tableau. Effectuons son analyse dans le cas moyen. Supposons que les $n!$ difféentes permutations des n nombres soient toutes équiprobables. Autrement dit, la probabilité qu'un élément quelconque soit dans une position donnée est égale à $\frac{1}{n}$.

Comme mentionné dans le chapitre précédent, la stratégie de l'algorithme consiste à chaque itération à ne continuer sa recherche que dans une moitié du tableau dont le nombre d'élélments est $\lfloor n/2 \rfloor$ ou $\lceil n/2 \rceil$. Suite à l'équiprobabilité de ces éléments, la probabilité que l'agorithm choisisse la partie de $\lceil n/2 \rceil$ éléments est $\dfrac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}$, et celle de $\lfloor n/2 \rfloor$ éléments, elle est $\dfrac{\lceil n/2 \rceil}{n}$. À chaque itération, l'algorithme effectue une comparaison entre C et un élément du tableau. De plus, en termes de probabilité, les deux recherches sont exclusives, donc additives. Par conséquent, la relation suivante qui détermine la complexité en moyenne, $t_{moy}(n)$, peut être dérivée sans trop de problème comme suit:

$$\begin{aligned} &t_{moy}(n) = 1 + \frac{\lceil n/2 \rceil}{n} t_{moy}(\lceil n/2 \rceil) + \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n} t_{moy}(\lfloor n/2 \rfloor) \\ &t_{moy}(1) = 1. \end{aligned}$$

Pour résoudre exactement cette équation, nous allons utliser la méthode du principe d'induction. Pour faciliter le processus de deviner la solution, nous allons supposer dans un premier temps que $n = 2^k$. Dans ce cas, l'équation ci-dessus devient:

$$\begin{aligned} &t_{moy}(n) = t_{moy}(n/2) + 1 \\ &t_{moy}(1) = 1. \end{aligned}$$

En résolvant cette équation, on obtient:

$$t_{moy} = \log n + 1$$

Revenons maintenant à l'équation de départ. les premières valeurs de t_{moy} sont résumées dans le tableau suivant:

$t_{moy}(1) = 1$	$t_{moy}(2) = 1 + 1/3$	$t_{moy}(3) = 2 + 2/3$	$t_{moy}(4) = 3$
$t_{moy}(5) = 3 + 2/5$	$t_{moy}(6) = 3 + 2/3$	$t_{moy}(7) = 3 + 6/7$	$t_{moy}(8) = 4$
$t_{moy}(9) = 4 + 2/9$	$t_{moy}(10) = 4 + 2/5$	$t_{moy}(11) = 4 + 6/11$	$t_{moy}(12) = 4 + 2/3$
$t_{moy}(13) = 4 + 10/13$	$t_{moy}(14) = 4 + 6/7$	$t_{moy}(15) = 4 + 14/15$	$t_{moy}(16) = 5$

On sait que tout nombre entier n peut s'écrire comme suit:

$$n = 2^k + j$$

où $k = \lfloor \log n \rfloor$ et $0 \leq j < n$.

En ayant à l'esprit la forme de la solution pour les $n = 2^k$, on peut constater que les valeurs résumées ddans le tableau ci-dessus obéissent à la formule suivante:

$$t_{moy}(2^k + j) = k + 3 - \frac{2^{k+1}}{2^k + j}$$

Autrement dit, la solution en fonction de n est come suit:

$$t_{moy}(n) = \lfloor \log n \rfloor + 3 - \frac{2^{\lfloor \log n \rfloor}}{n}$$

Source: D. Rebaïne (2000): *Une introduction à l'analyse des algorithmes*, Chapitre 3, ENAG.